Г.Ю.Ризниченко

Исследование одного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Основные понятия (автономность)

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t).$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Автономное уравнение. Правая часть не зависит явно от t

Переменные и параметры

$$\frac{dx}{dt} = ax + bxy + dx\sin wt$$

x, t – переменные

a,b,d,w - *параметры*

Стационарное состояние

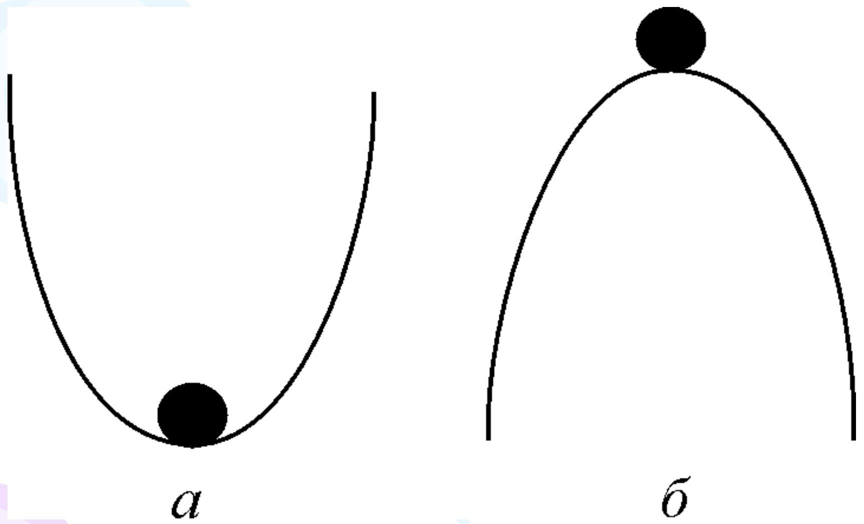
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\bar{x}} = 0$$

Скорость изменения переменной x равна нулю

$$f(\bar{x}) = 0$$

Правая часть уравнения равна нулю

Устойчивость стационарного состояния



Стационарное состояние устойчиво, если малые отклонения с течением времени остаются малыми

Метод Ляпунова исследования устойчивости стационарного состояния

Метод линеаризации функции в окрестности стационарного состояния

Выразим переменную *x* через отклонение от стационарного значения:

$$x = \bar{x} + \xi \qquad \xi / \bar{x} << 1$$

$$\frac{d(\bar{x} + \xi)}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(\bar{x} + \xi)$$

Правую часть разложим в ряд

Тейлора в точке $\bar{x}$

$$\frac{d\xi}{dt} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\xi + \frac{1}{2} f''(\bar{x})\xi^2 + \ldots$$

Брук Тэйлор (1685-1731)

- Английский

математик, музыкант, живописец, философ.

Формула Тэйлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n}$$

Значение функции $f(x)$ в точке x в окрестности точки a выражается в виде степенного ряда

Отбросим члены более высокого порядка. Получим линеаризованное уравнение:

$$d\xi / dt = a_1 \xi,$$

Решение линеаризованного уравнения

$$\xi(t) = c \cdot \exp(\lambda t)$$

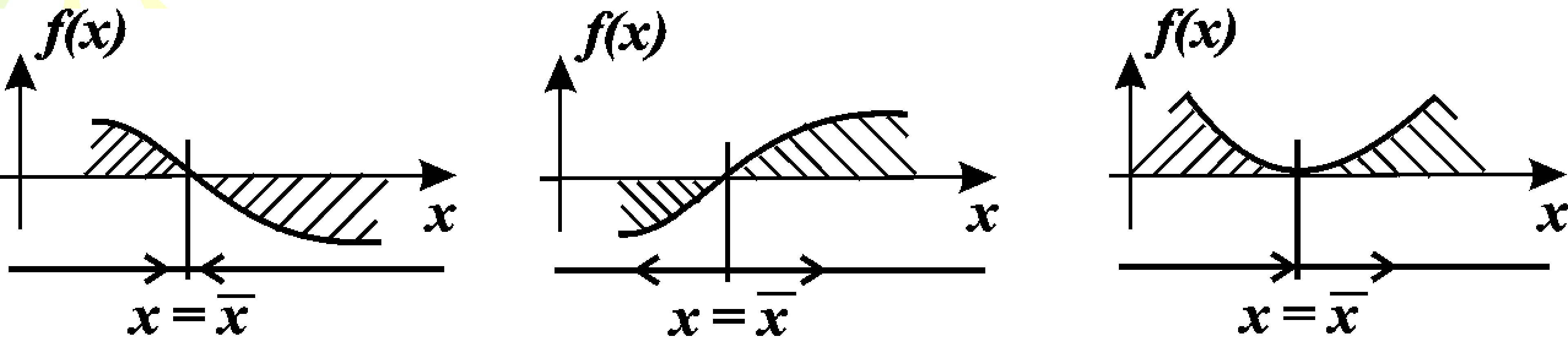
$$\lambda = a_1 = f'(\bar{x})$$

С – произвольная постоянная. С=ξ(0)

Метод Ляпунова

Устойчивость стационарного состояния уравнения dx/dt=f(*x*) $\bar{x}$ *определяется знаком производной правой части в стационарной точке. Если эта производная равна нулю, требуется рассмотрение в разложении* f (*x*) *членов более высокого порядка*

Графический метод анализа устойчивости стационарного состояния



а	*б*	*в*
устойчиво	неустойчиво	неустойчиво

Типы аттракторов

- *Устойчивая точка покоя*
- *Предельный цикл — режим колебаний с постоянными периодом и амплитудой (начиная с размерности системы 2)*
- *Области с квазистохастическим поведением траекторий в области аттрактора, например, «странный аттрактор» (начиная с размерности 3).*