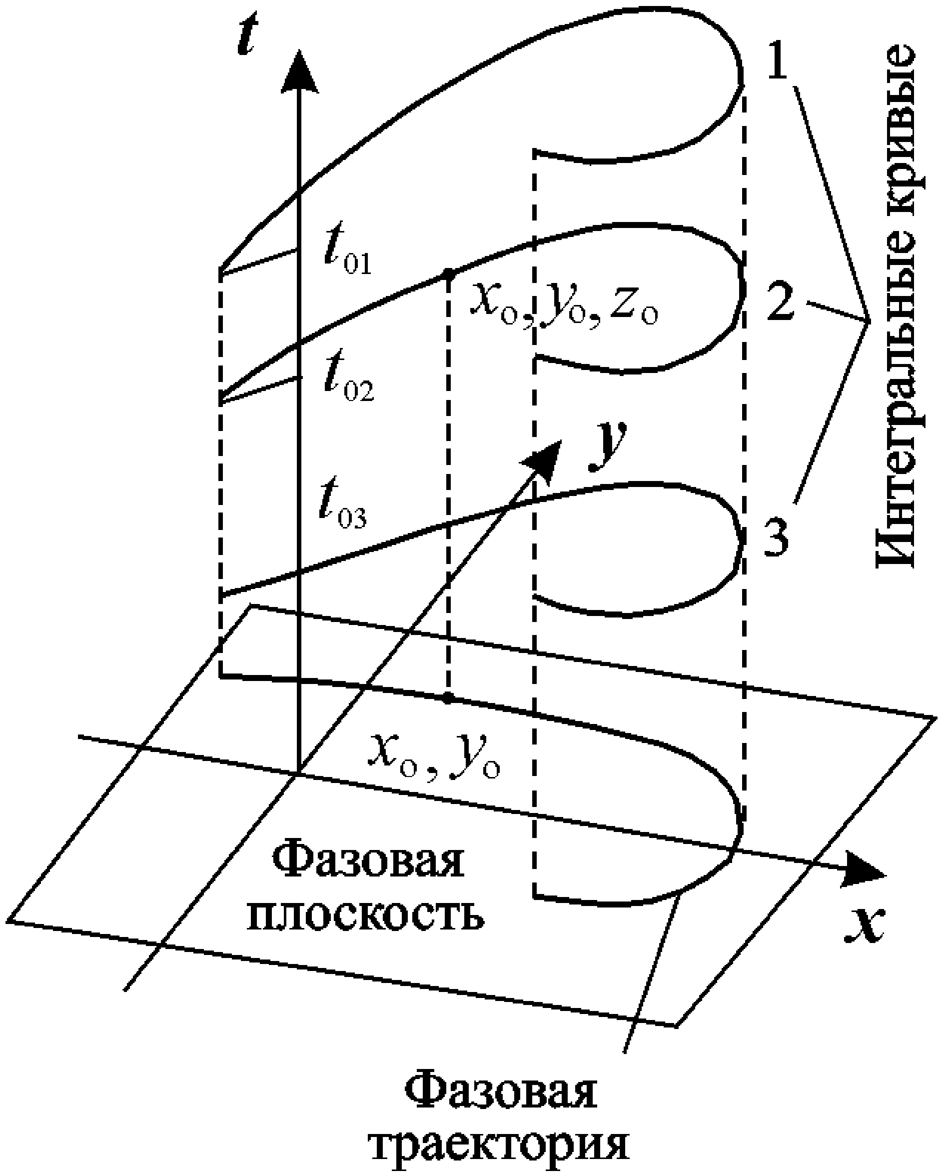
Фазовая плоскость

Г.Ю.Ризниченко

Качественное исследование

Анализ устойчивости стационарного состояния системы двух автономных дифференциальных уравнений



Траектории системы в пространстве (x,y,t)

Жюль Анри Пуанкаре́
(Jules Henri Poincaré)
1854-1912)

Типы устойчивости стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

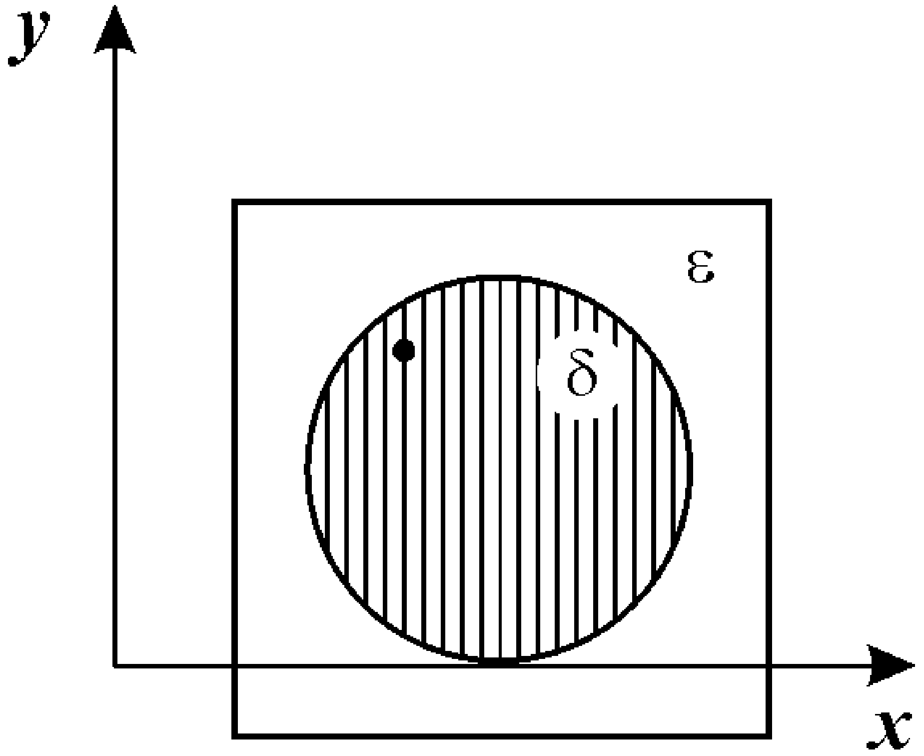
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Ляпуно́в Алекса́ндр Миха́йлович (1857 –1918) – русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров.

Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей.

Определение устойчивости

- *Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия* (ε) *можно указать область* $\delta(\varepsilon)$, *окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области* δ, *никогда не достигнет границы* ε.



Устойчивость стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Решение ищем в виде: $$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

$$\lambda A = aA + bB,$$

$$\lambda B = cA + dB.$$

Условие нетривиального решения $$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Характеристическое уравнение $$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by,$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Устойчивость определяется действительной частью собственного числа λ

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$x = Ae^{\lambda t},$$
$$y = Be^{\lambda t}$$

Если числа λ_1 λ_2 – действительны и отрицательны – устойчивый узел;

Если числа λ_1 λ_2 – действительны и положительны – неустойчивый узел

Если λ_1 λ_2 – действительны и разных знаков – седло

Если λ_1 λ_2 – комплексно сопряженные, решение ищется в виде $x = e^{\lambda t} = e^{\mathrm{Re}\,\lambda t} \cdot e^{i\,\mathrm{Im}\,\lambda t}$

Мнимая часть не сказывается на устойчивости

Если $\lambda_{1,}$ λ_2 – комплексно сопряженные и Re $\lambda_{1,}$ λ_2 <0– устойчивый фокус

Если $\lambda_{1,}$ λ_2 – комплексно сопряженные и Re $\lambda_{1,}$ λ_2 >0– неустойчивый фокус

Если $\lambda_{1,}$ λ_2 – чисто мнимые и Re λ_1 λ_2 =0 – центр

Формула Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

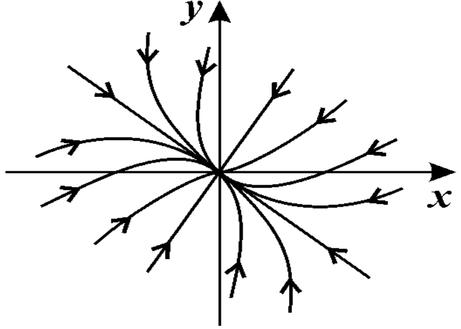
Поведение фазовых траекторий системы двух линейных ОДУ в окрестности стационарного состояния при разных значениях характеристических чисел

$$\lambda_{1,2}$$

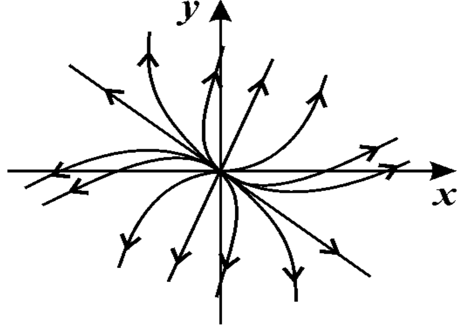
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

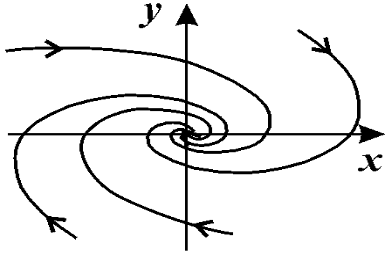
Формула Эйлера



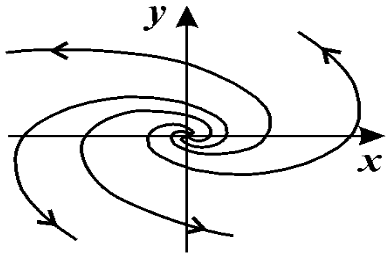
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



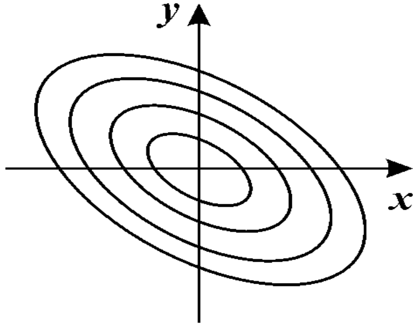
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



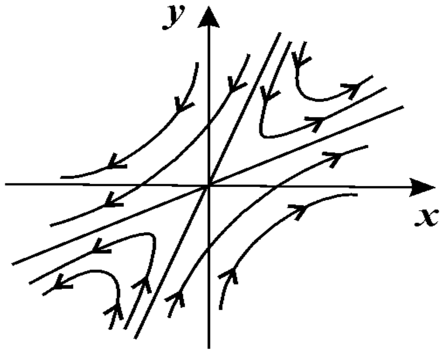
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Бифуркацонная диаграмма

$$\frac{dx}{dt} = ax + by,\quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

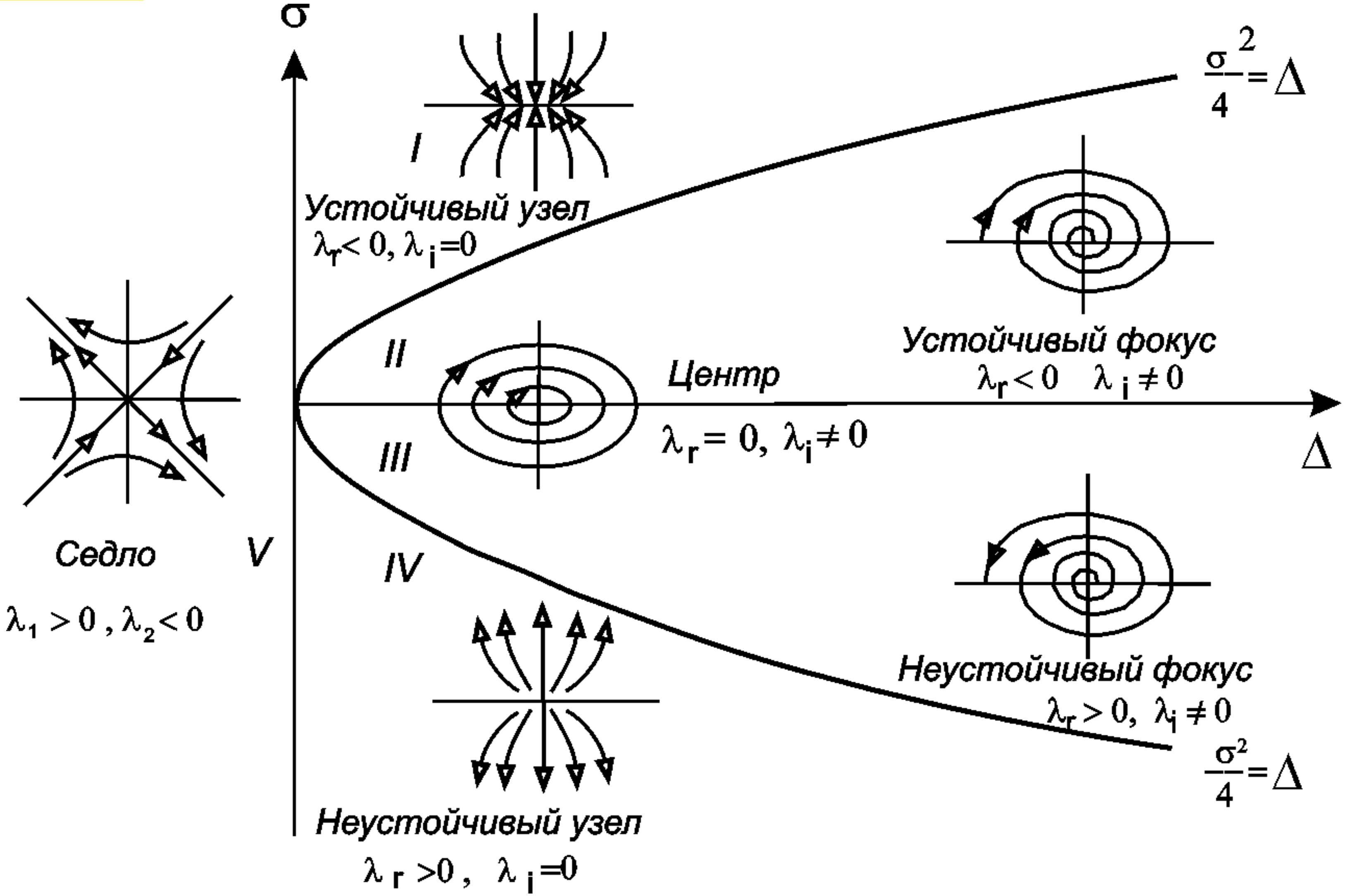
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

Фазово-параметрическая

$$x = Ae^{\lambda t},\quad y = Be^{\lambda t}$$

$$\sigma = -(a+d);\ \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$



Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$x = \bar{x} + \xi,$$
$$y = \bar{y} + \eta.$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = P(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta),$$
$$\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} = Q(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta).$$

$$\frac{d\bar{x}}{dy} = \frac{d\bar{y}}{dt} = 0$$

Разложение правой части в ряд Тейлора. Линеаризация системы

$$\frac{d\xi}{dt} = P(\bar{x}, \bar{y}) + a\xi + b\eta + (p_{11}\xi^2 + 2p_{12}\xi\eta + p_{22}\eta^2 + \ldots) + \ldots,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = Q(\bar{x}, \bar{y}) + c\xi + d\eta + (q_{11}\xi^2 + 2q_{12}\xi\eta + q_{22}\eta^2 + \ldots) + \ldots,$$

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

$$Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$a = P_x'(\bar{x}, \bar{y}), \;\; b = P_y'(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$c = Q_x'(\bar{x}, \bar{y}), \;\; d = Q_y'(\bar{x}, \bar{y}).$$

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$a = P_x'(\bar{x}, \bar{y}), \; b = P_y'(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$c = Q_x'(\bar{x}, \bar{y}), \; d = Q_y'(\bar{x}, \bar{y}).$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Если *оба корня* характеристического уравнения имеют ***отрицательную*** *действительную* часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то *состояние равновесия* ***устойчиво;***

- если *хотя бы один корень* имеет ***положительную*** *действительную часть*,
- то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то *состояние равновесия* ***неустойчиво****.*

- Если *действительные части обоих корней* характеристического уравнения *равны нулю* или если *один корень равен нулю*, *а другой отрицателен*, то линеаризованные *уравнения не дают ответа* на вопрос об *устойчивости состояния равновесия*, и необходимо *рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений*

Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)

$$\longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{k_0} \mathbf{X} \xrightarrow{k_1} \mathbf{Y} \xrightarrow{k_2} \mathbf{B}$$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$

Лотка Альфред Джеймс (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

Стационарное решение

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = 0.$$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y.$$

$$k_0 - k_1 \bar{x}\bar{y} = 0,$$

$$k_1 \bar{x}\bar{y} - k_2 \bar{y} = 0.$$

$$\bar{x} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \bar{y} = \frac{k_0}{k_2}$$

Характеристическое уравнение для уравнения Лотки

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$a = P_x'(\bar{x},\bar{y}),\ \ b = P_y'(\bar{x},\bar{y}),$$
$$c = Q_x'(\bar{x},\bar{y}),\ \ d = Q_y'(\bar{x},\bar{y}).$$

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y.$$

$$\bar{x} = \frac{k_2}{k_1},\quad \bar{y} = \frac{k_0}{k_2}$$

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{k_1 k_0}{k_2} - \lambda & -k_2 \\ \dfrac{k_1 k_0}{k_2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 - 4k_0 k_1}\right]$$

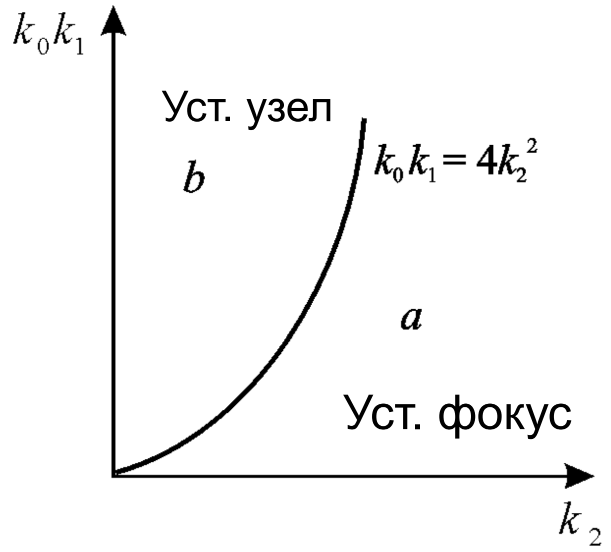
Фазовый портрет системы Лотки

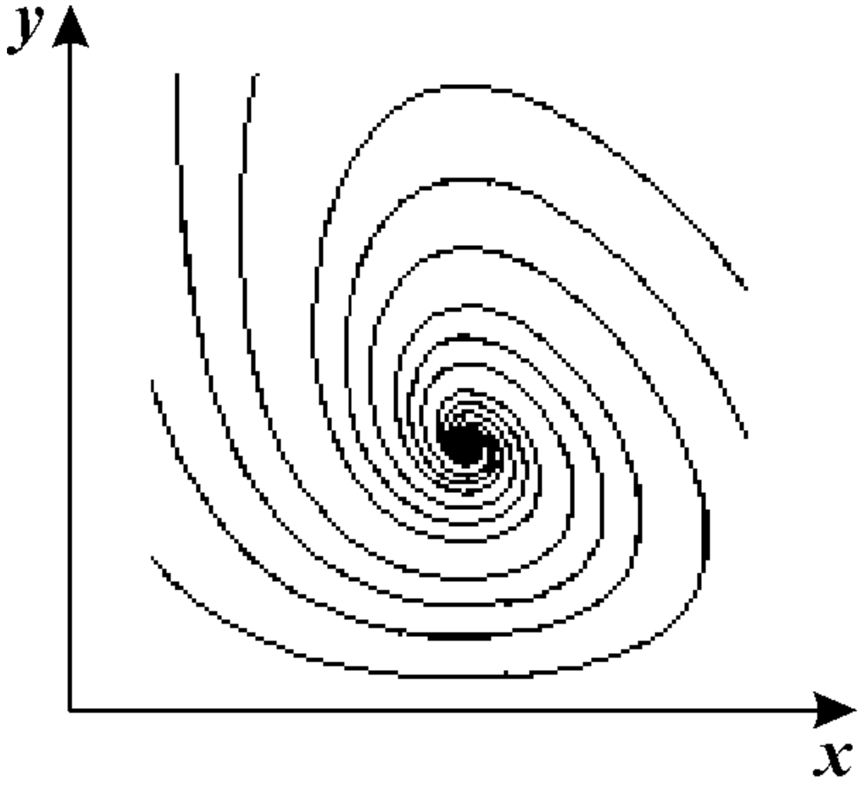
$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y.$$

а – устойчивый фокус,

б – устойчивый узел.

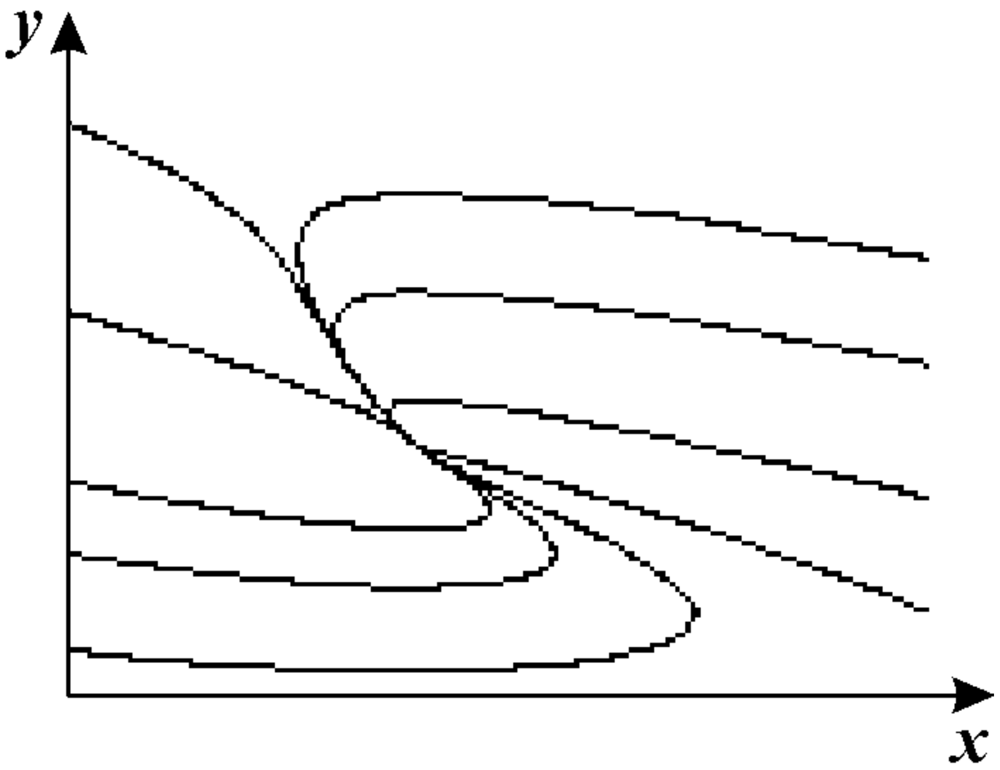
$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 - 4k_0 k_1}\right]$$





а

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$$



б

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$$

Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y),$$

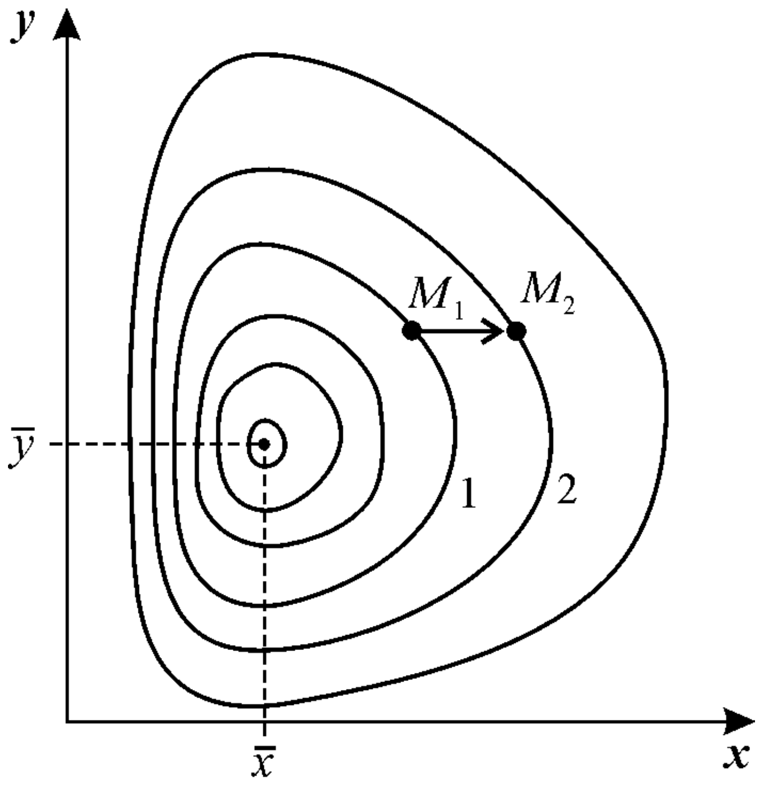
$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x).$$

Vito Volterra

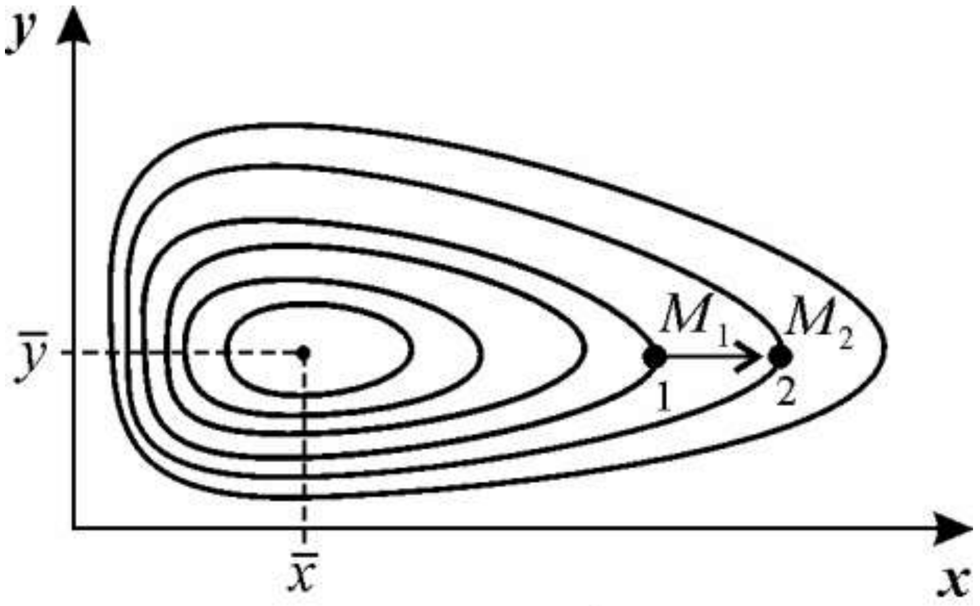
X – численность жертв
Y – численность хищников

Вольтерра Вито (1860 —1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

Фазовый портрет модели Вольтерра



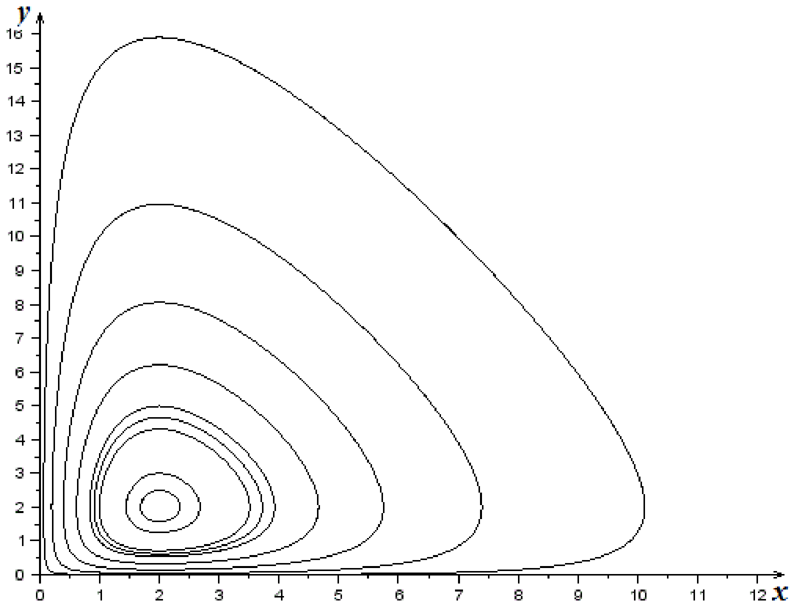
а



б

$\varepsilon x = 4$, $\gamma xy = 0{,}3$, $\varepsilon y = \gamma yx = 0{,}4$

$\varepsilon x = 2$, $\gamma xy = 0{,}3$, $\varepsilon y = \gamma yx = 0{,}4$



Volterra predator–prey model describing continuous oscillations of the population numbers.

(a) phase pattern;

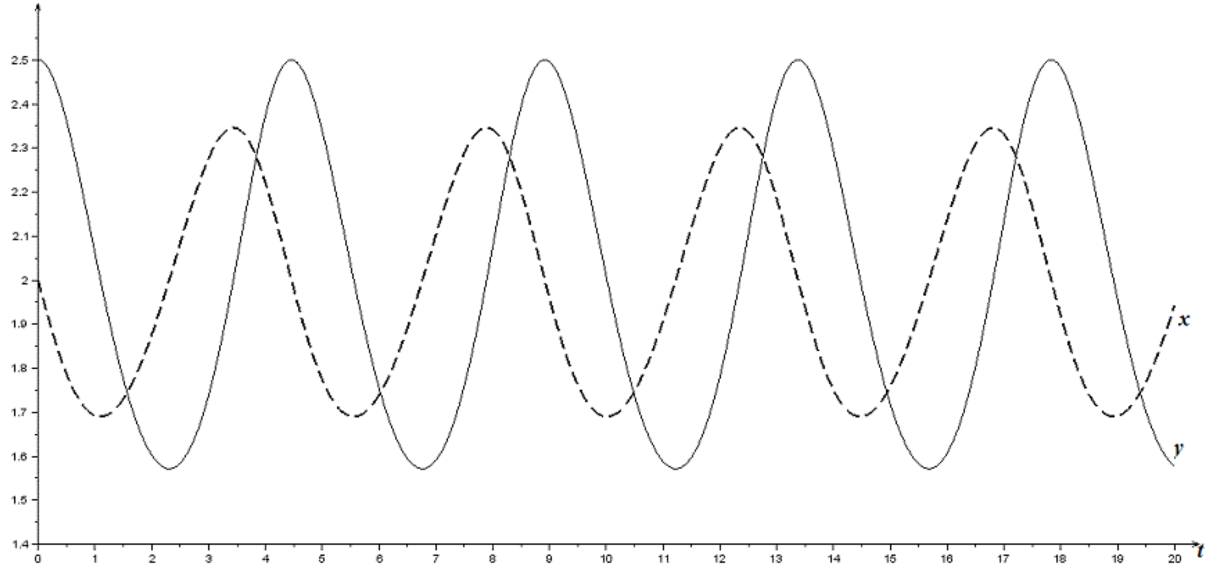
(b) dependence of the numbers of predators and preys on time.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

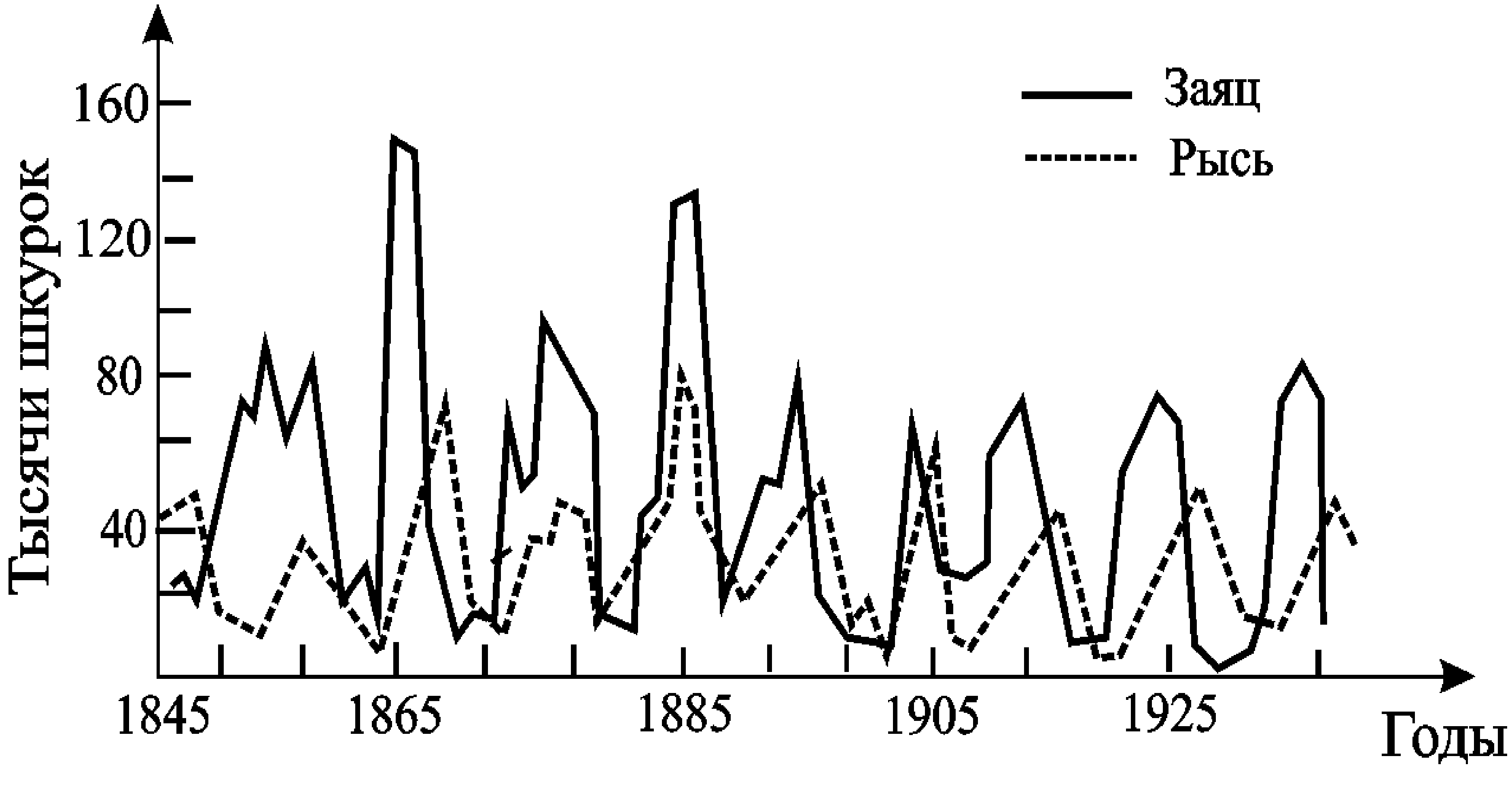
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

$$a = 1; b = 0.5;$$

$$c = 1; d = 2$$



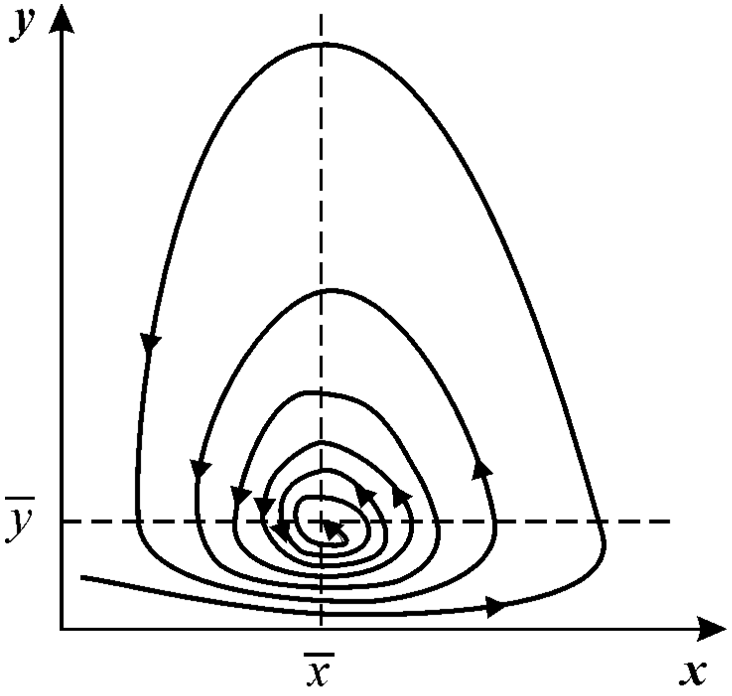
Кривые численности зайца и рыси в Канаде (по К. Вилли, В. Детье, 1974)



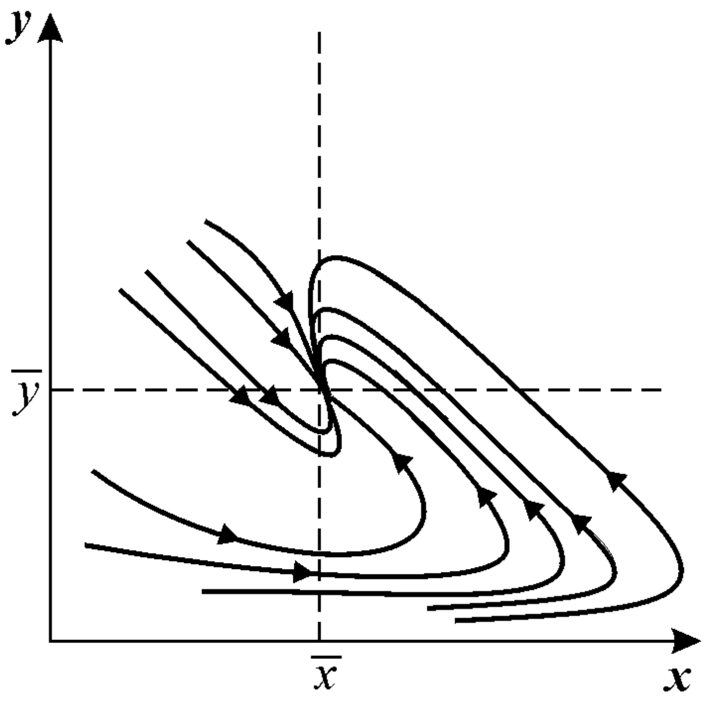
Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx} x - \delta_y y).$$

$\varepsilon_x = 2$,
$\gamma_{xy} = 18$,
$\delta_x = 1$,
$\varepsilon_y = 3$,
$\gamma_{yx} = 5$,
$\delta_y = 1$



а



б

$\varepsilon_x = 2$,
$\gamma_{xy} = 1$,
$\delta_x = 1$,
$\varepsilon_y = 3$,
$\gamma_{yx} = 1$,
$\delta_y = 1$