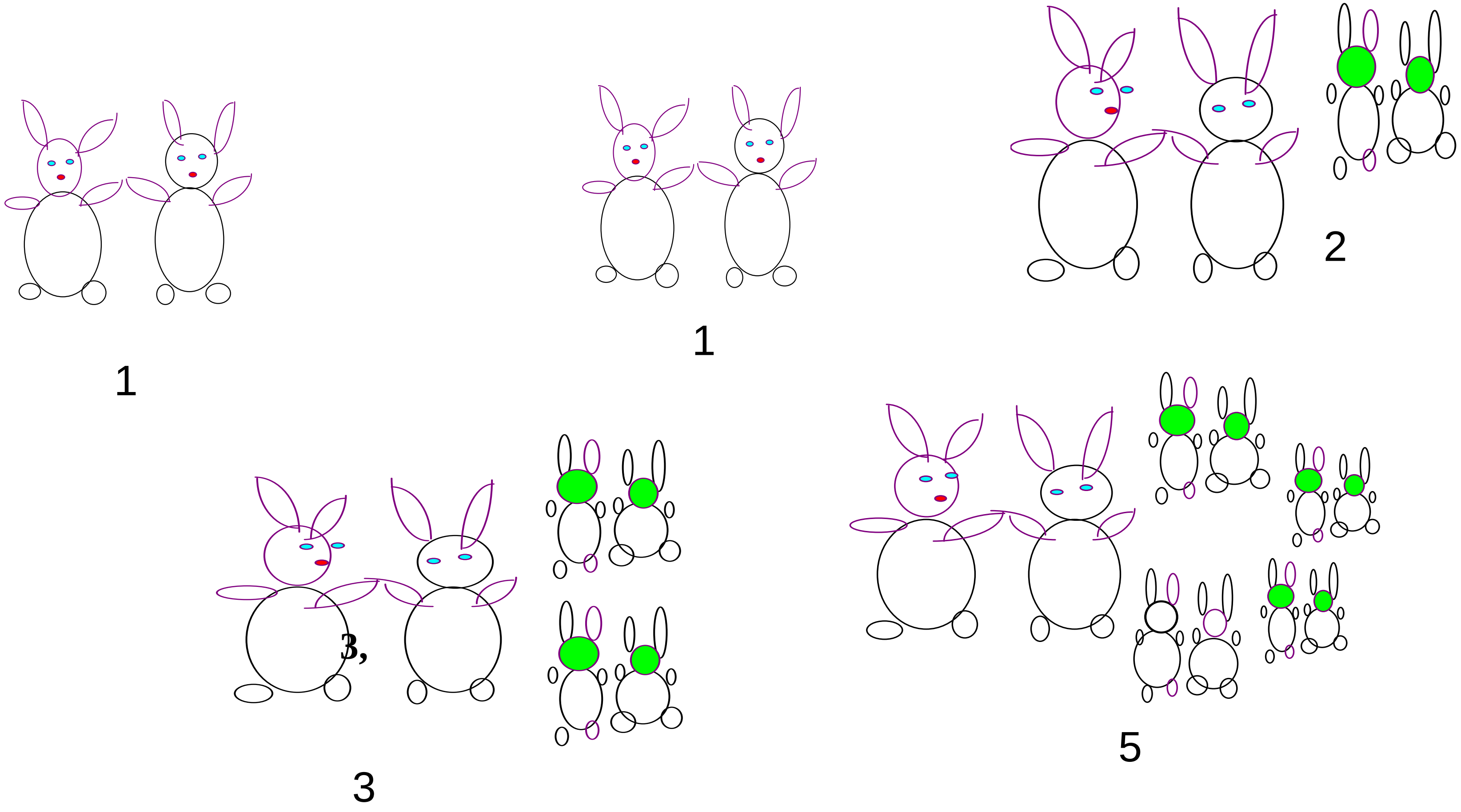
Г.Ю.Ризниченко

# Модели популяционной динамики

# Модели одной популяции

- *Непрерывные модели: экспоненциальный рост, логистический рост, модели с наименьшей критической численностью.*
- *Модели с неперекрывающимися поколениями. Дискретное логистическое уравнение.*
- *Диаграмма и лестница Ламерея.*
- *Типы решений при разных значениях параметра: монотонные и затухающие решения, циклы, квазистохастическое поведение, вспышки численности.*
- *Матричные модели популяций.*
- *Влияние запаздывания.*

# Популяционная динамика ряд Фибоначчи




Леона́рдо **Пиза́нский**
лат. *Leonardus Pisanus*, итал. *Leonardo Pisano*, около 1170 - 1250,— первый крупный математик средневековой Европы.

Наиболее известен под прозвищем **Фибона́ччи**.

Леонардо из Пизы («Трактат о счете», 13 век)

# Непрерывные модели роста популяций

Модель экспоненциального роста Мальтуса

Malthus T.R. An essay on the principal of Population. 1798.
Charleston, BiblioBazaar, 2007.

Перевод на русский язык: Мальтус Т.Р. Опыт о законе роста народонаселения. Спб, Типография И.И. Глазунова, 1868

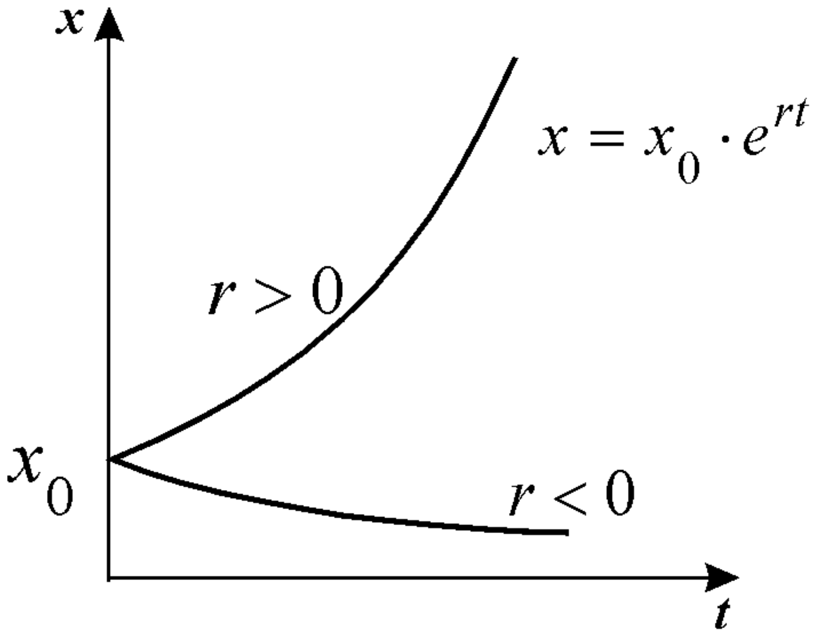
*Thomas Robert Malthus*

1766-1834

$$N_{t+1} = qN_t$$

$$N_{t+1} = q^n N_0$$

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$



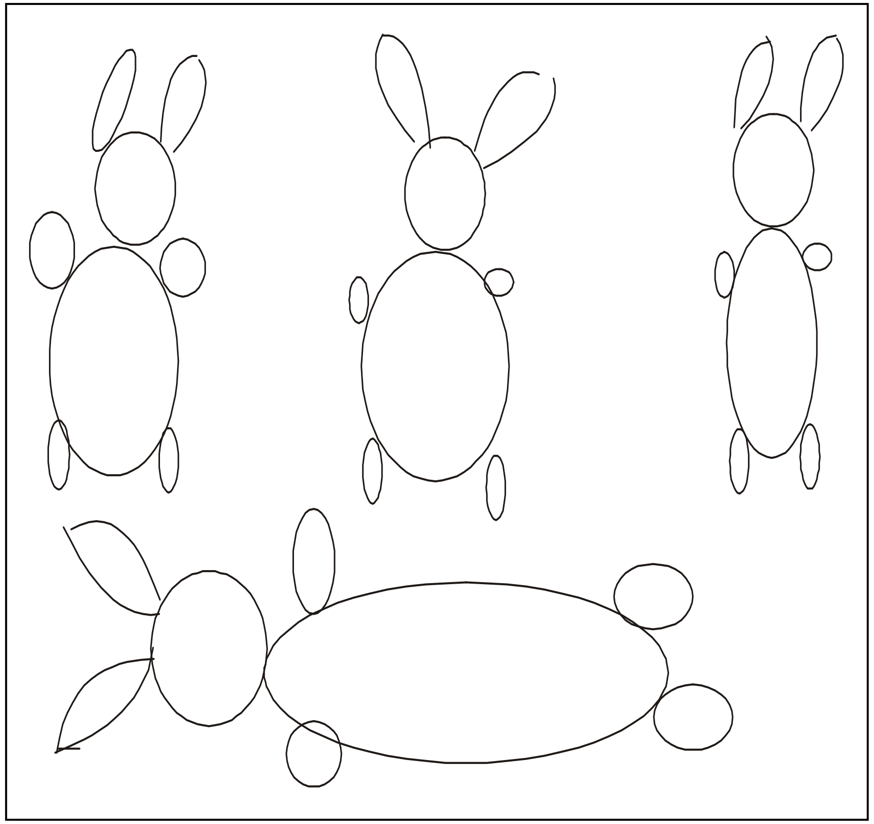
# Уравнение логистического роста (Ферхюльст, 1845)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

r – константа скорости роста
K – емкость экологической ниши


Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corr. Math. Et Phys.* **10**: 113-121, 1838

1804-1849



К – системный фактор

# Уравнение Ферхюльста

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}}$$

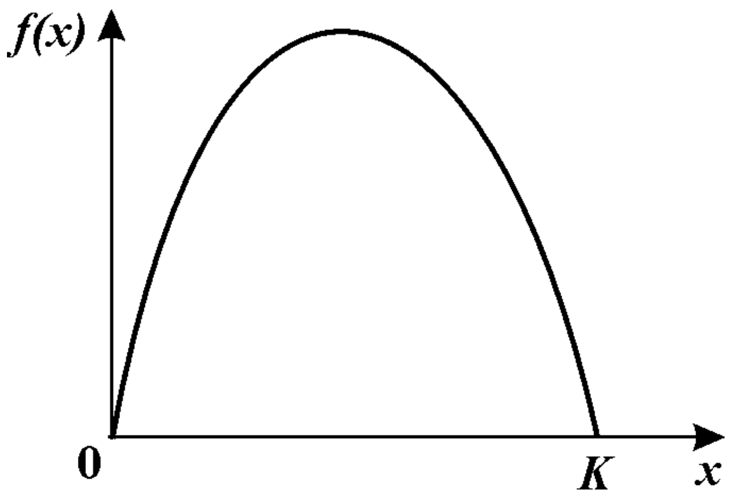
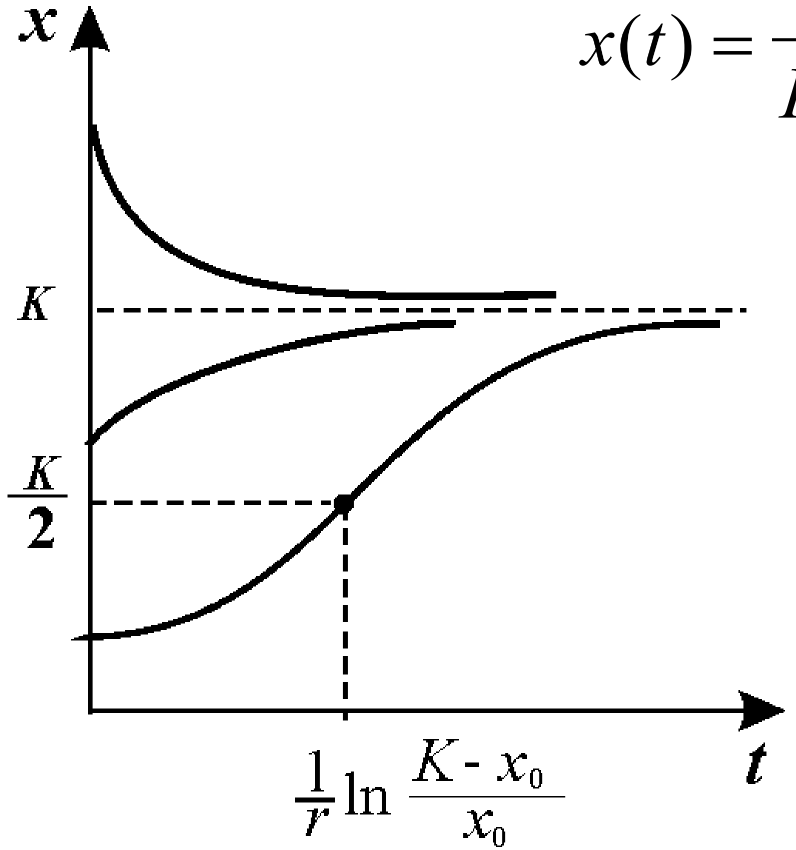


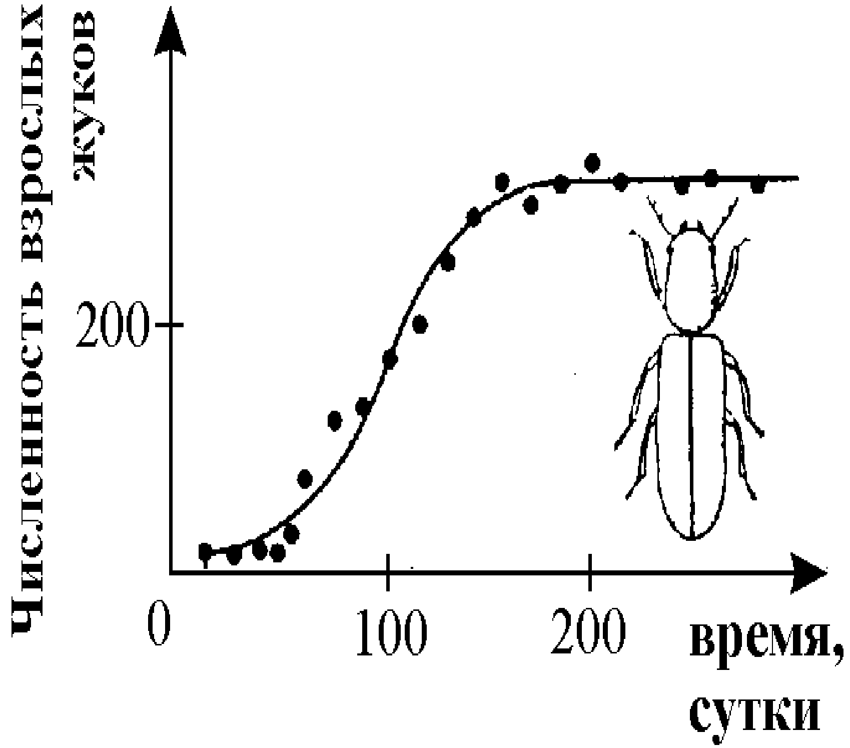

График функции $f(x)$




Поведение $x$ во времени

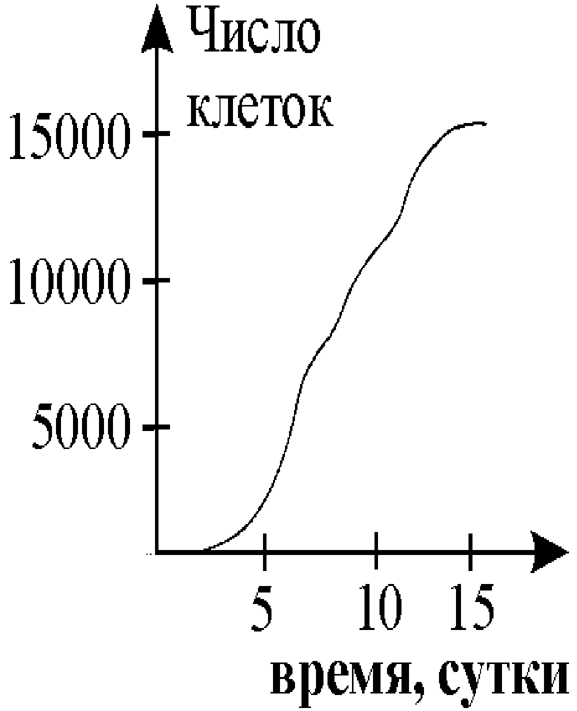
# Ограниченный рост (уравнение Ферхюльста)

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$




*а*

Жук *Rhizoretha dominica* в 10-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю (Crombie, 1945).

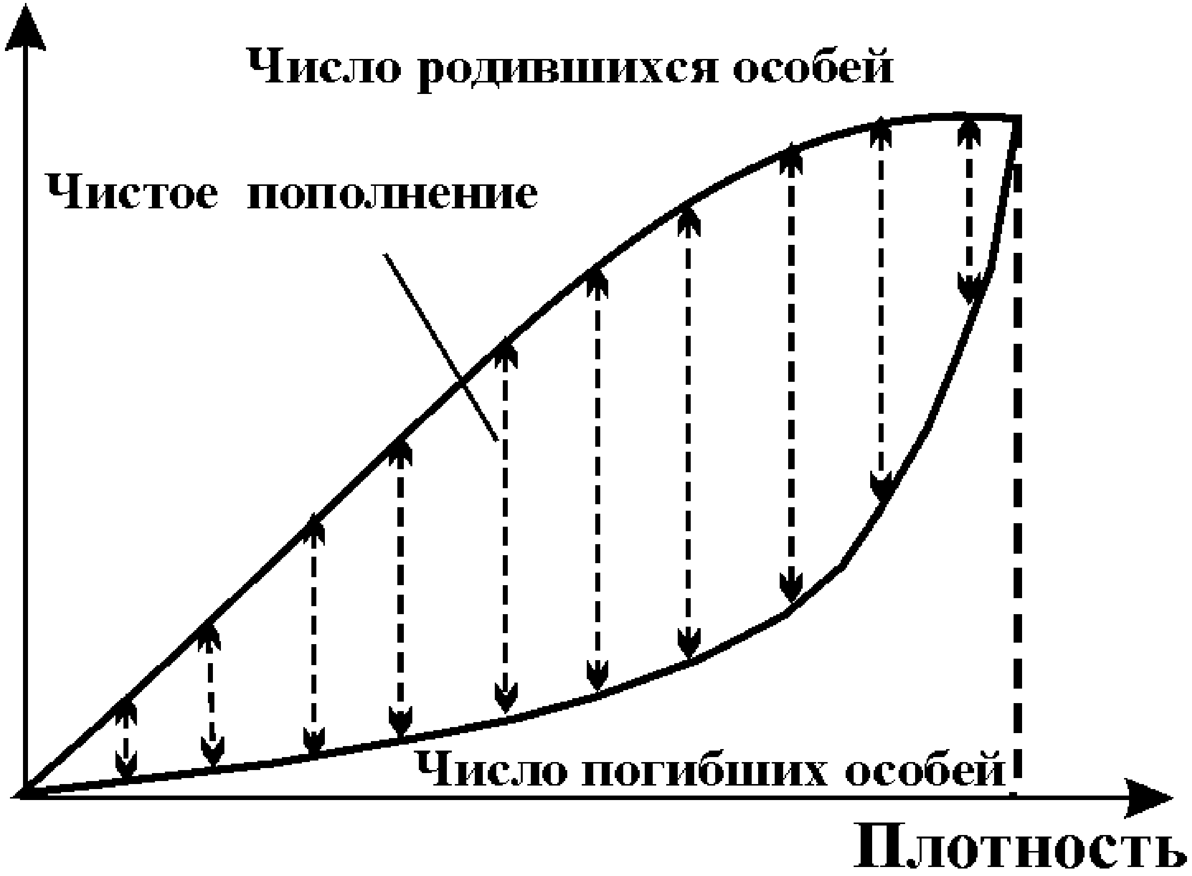


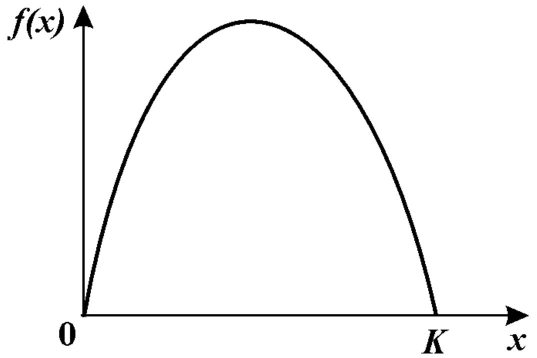

*б*

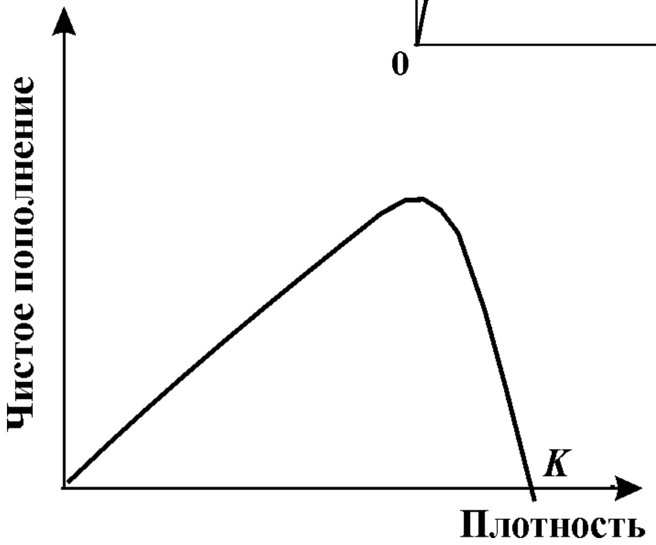
Водоросль *Chlorella* в культуре (Pearsall, Bengry, 1940)

# Кривые пополнения

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$

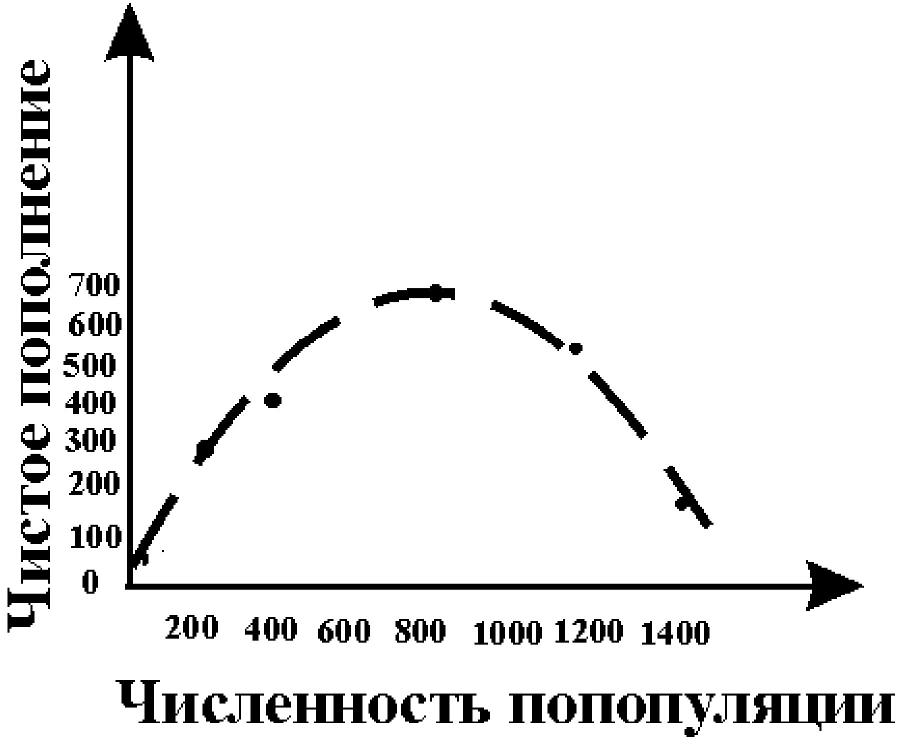


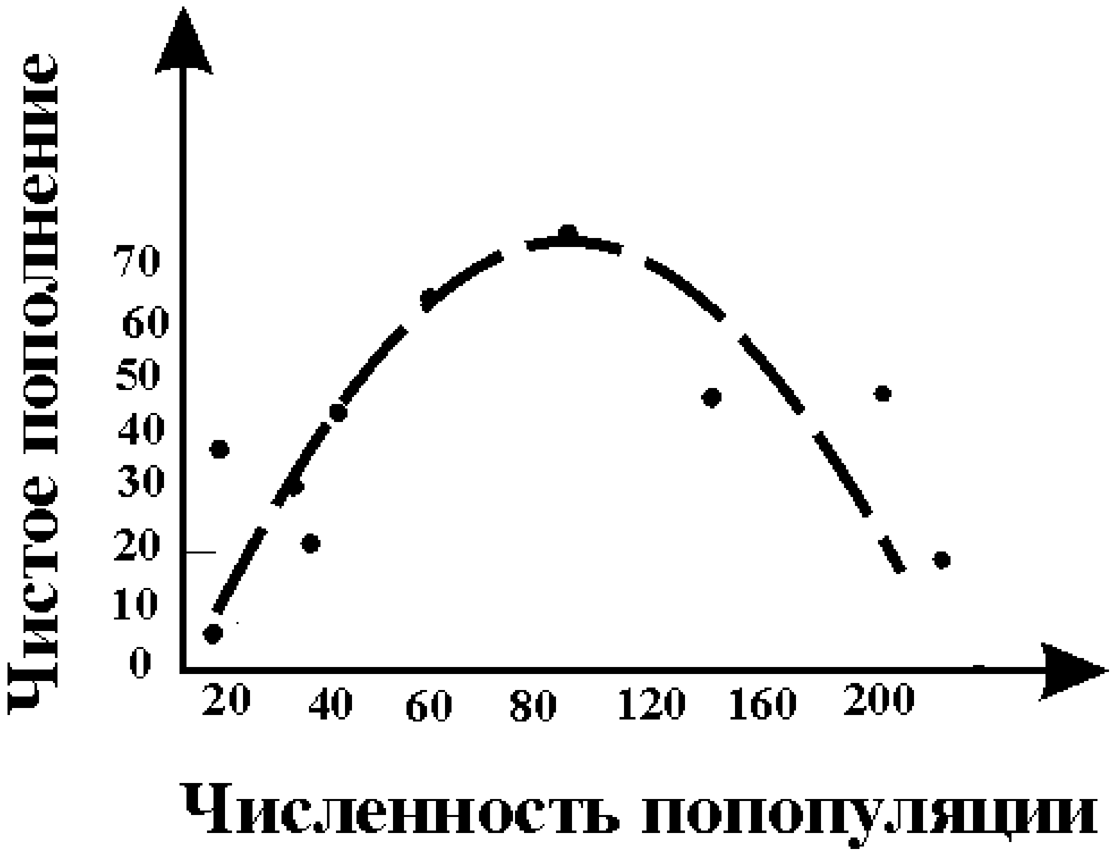
# М.Бигон, Дж.Харпер, К.Таусенд «Экология. Особи, популяции и сообщества» т.1,2 М., Мир 1989

Примеры кривых пополнения (1)



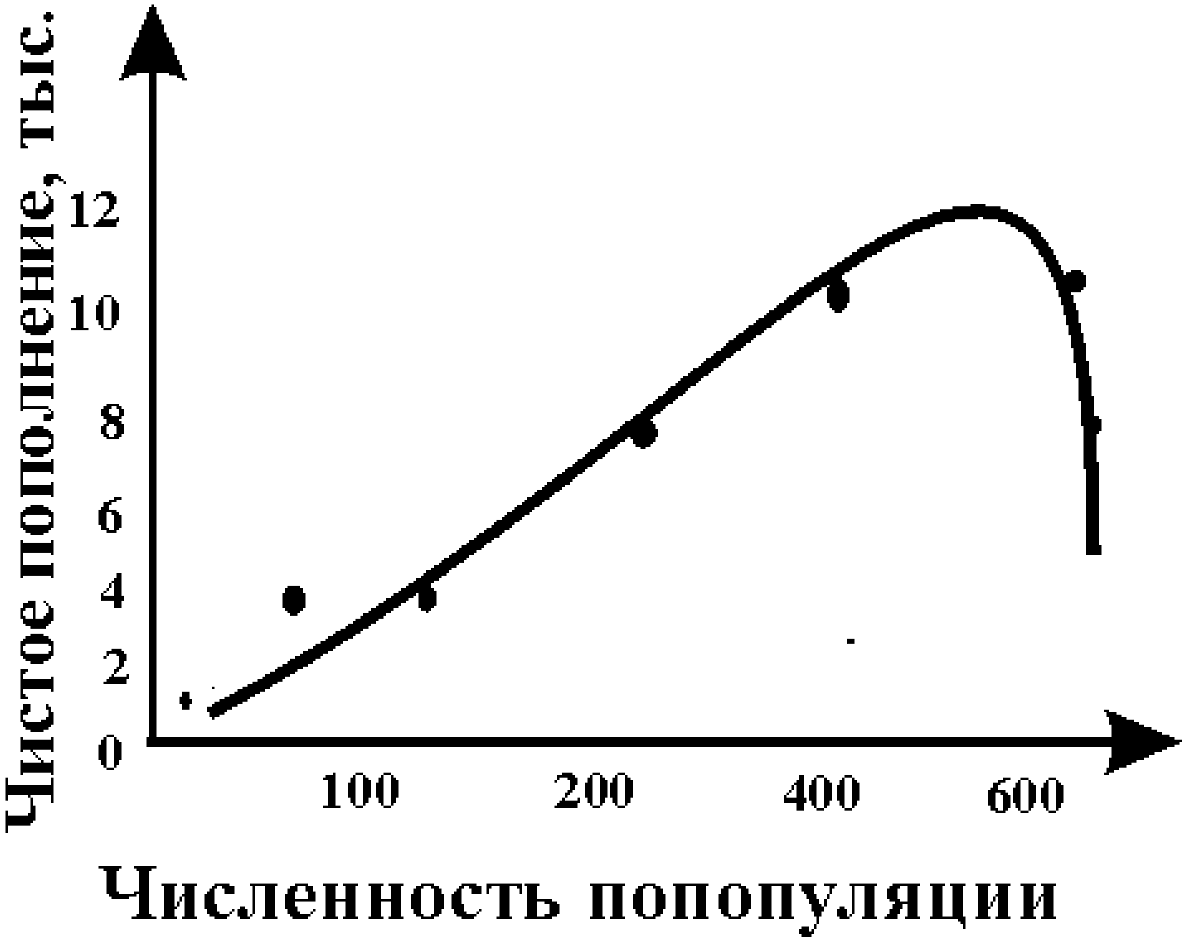

численность фазана обыкновенного
на о. Протекшн - Айленд после его интродукции в 1937 г.
(Einarsen, 1945);

# Примеры кривых пополнения (2)




экспериментальная популяция плодовой мушки *Drosophyla melanogaster* (*Pearl, 1927*)

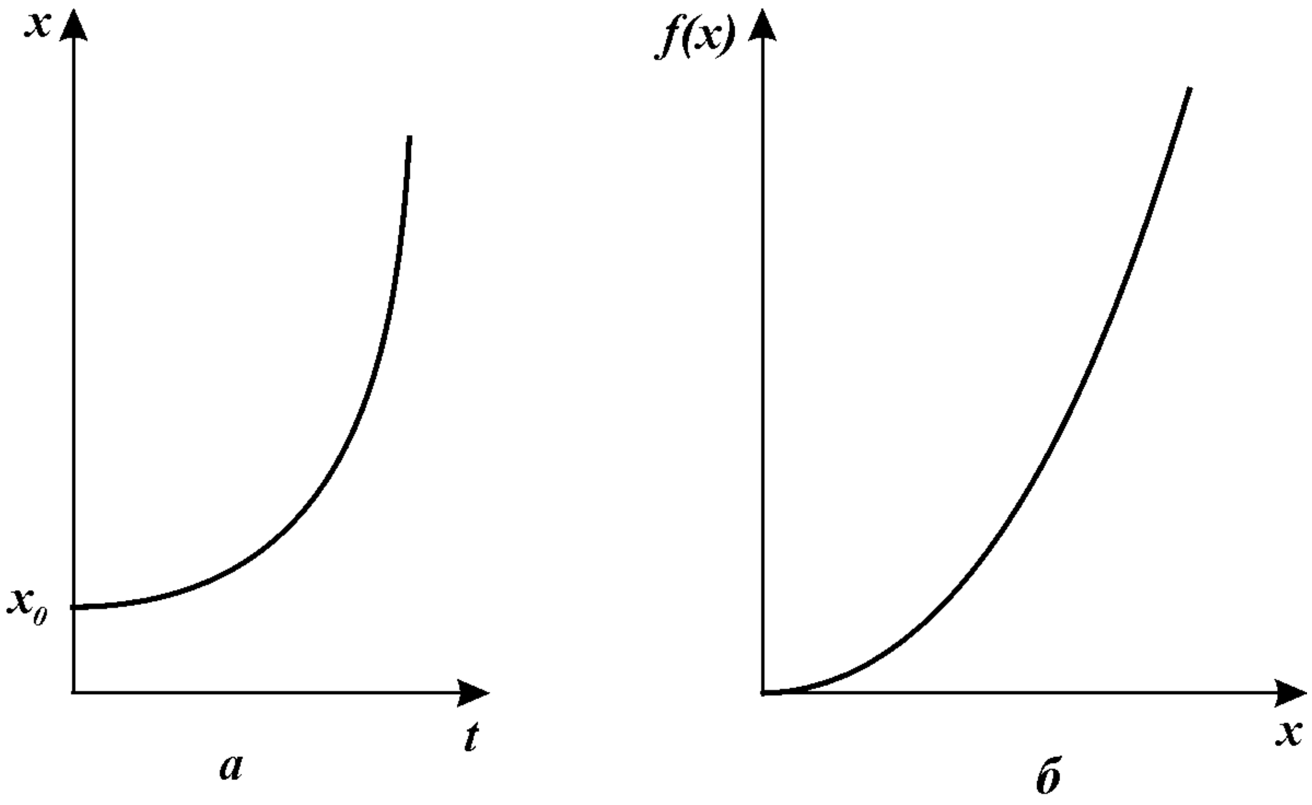
# Примеры кривых пополнения (3)




оценка численности *арктического финвала* (*Allen*, *1972*)

# Учет двуполого размножения

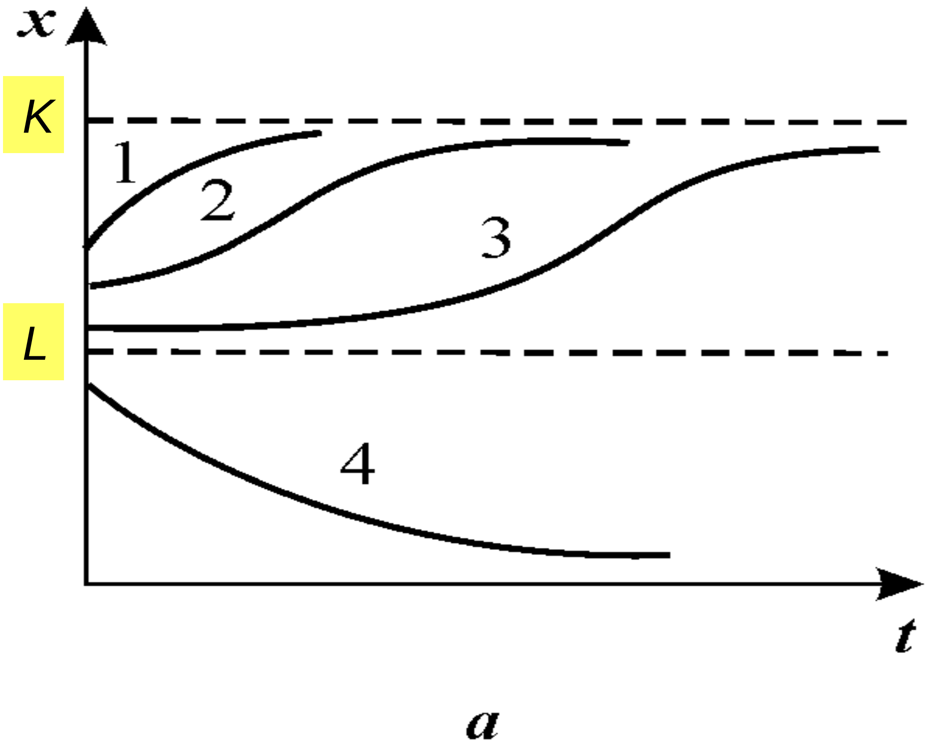
$$\frac{dx}{dt} = rx^2$$

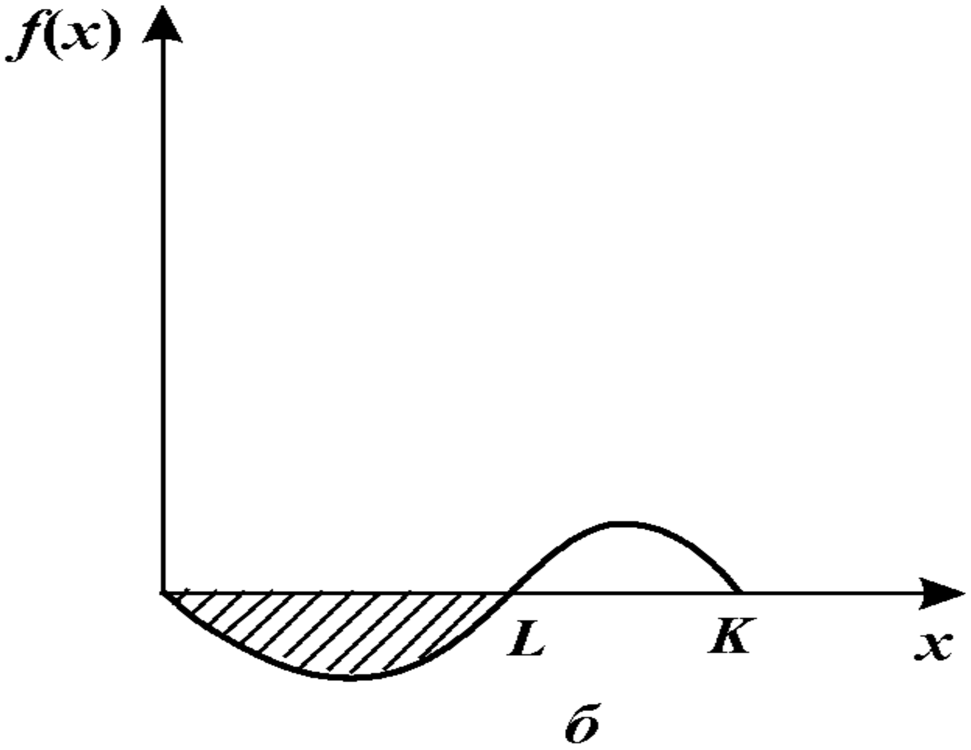



$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x}$$

При низких плотностях скорость размножения пропорциональна вероятности встреч.
При высоких – числу самок в популяции.

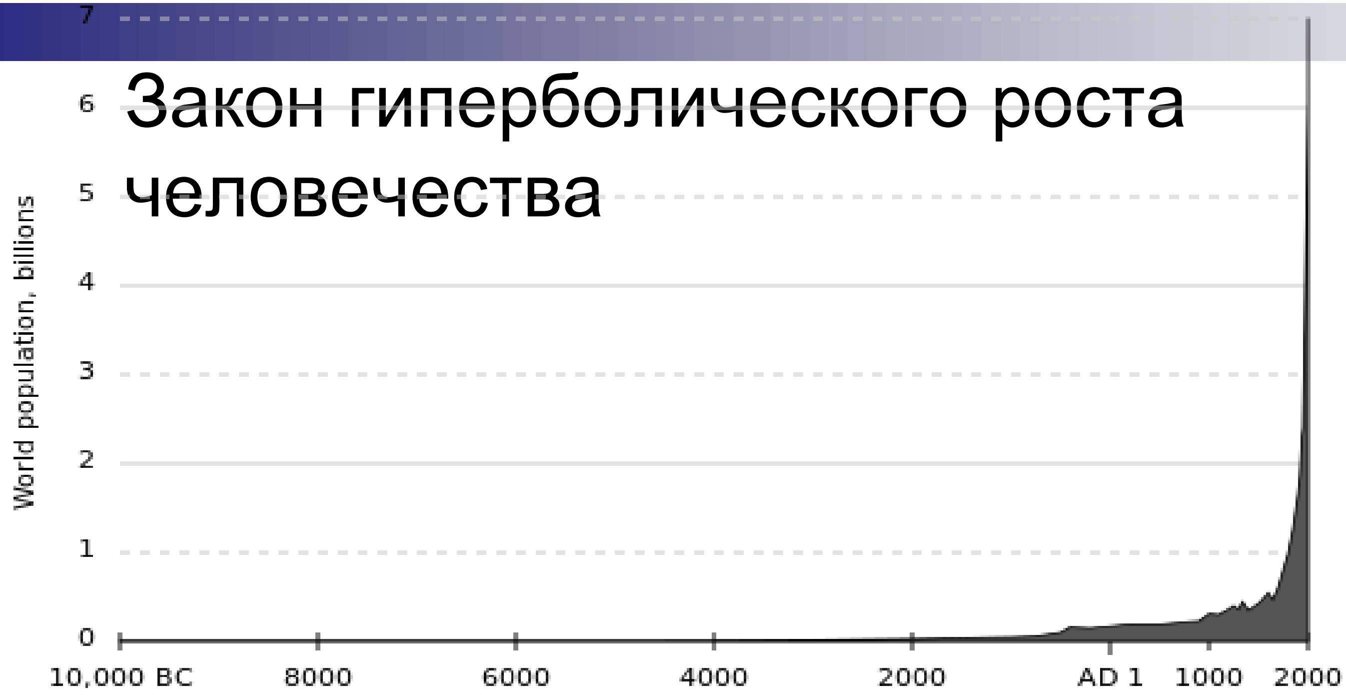
# Наименьшая критическая численность




$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$

# Закон гиперболического роста человечества

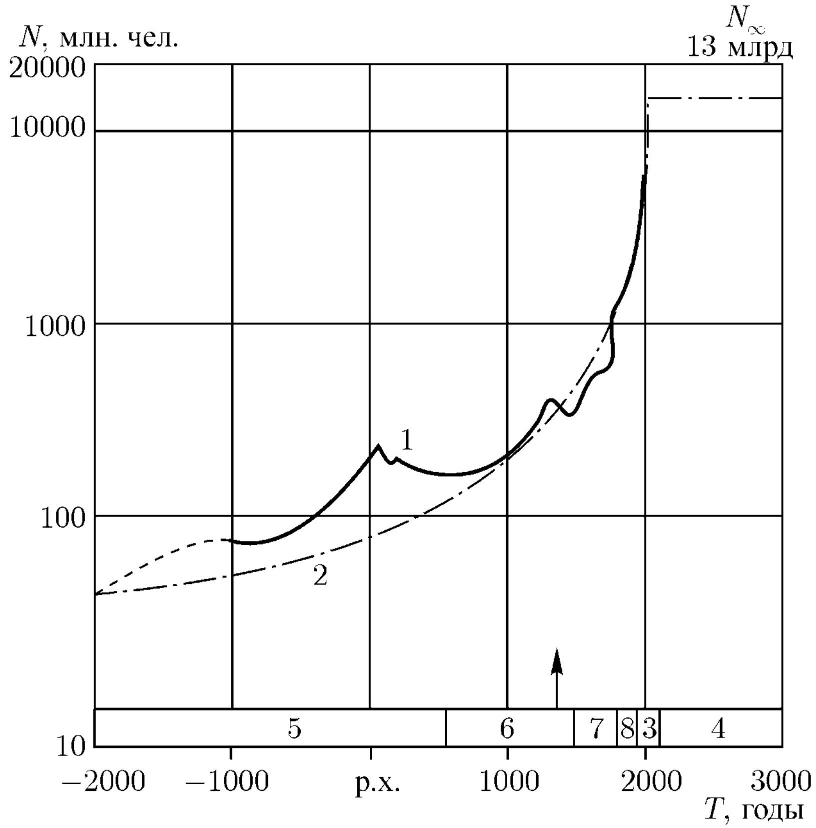



- [Foerster, H. von](), *P. Mora, and L.* Doomsday:
- Friday, 13 November, A.D. 2026. At this date human population will approach infinity if it grows as it has grown in the last two millennia //
- [Science](). — 1960. — № 132. — С. 1291—1295.

Хайнц фон Фёрстер
1911-2002
Физик, математик, демограф

## Динамика численности человечества

$$\tau \frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{K^2} \qquad N(T) = \frac{K^2 \tau}{T_{crit} - T}$$

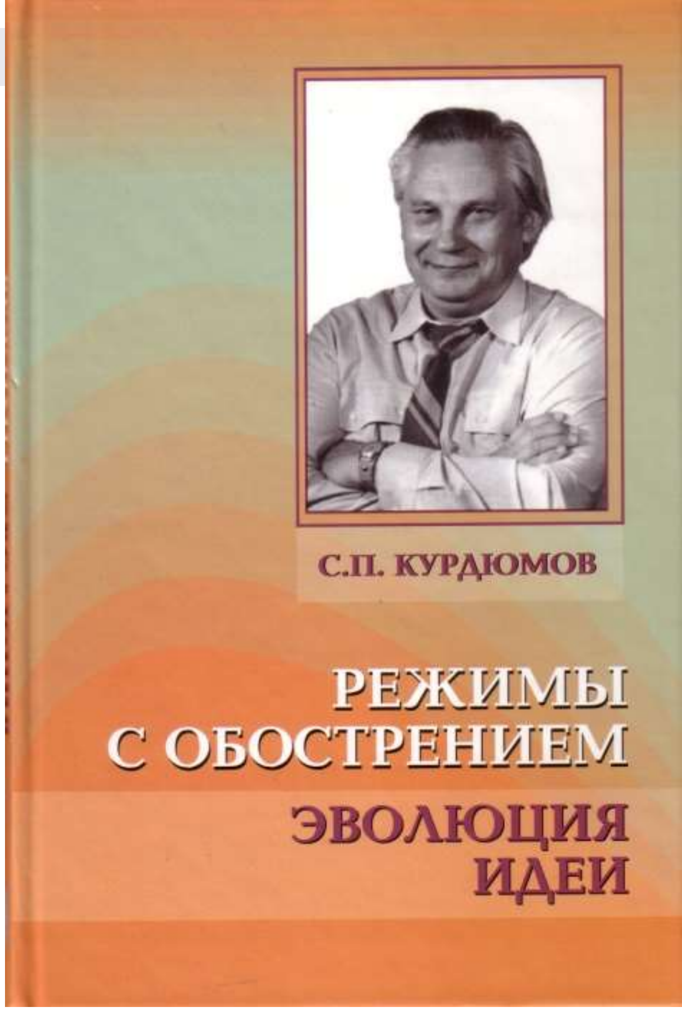



Сергей Петрович Капица (1928-2012)

Общая теория
роста человечества 1999

Г.Ю.Ризниченко, А.Б.Рубин
Биофизическая динамика продукционных процессов. Глава 8

Изд. РХД, 2004;
Изд. Юрайт 2016, часть 2



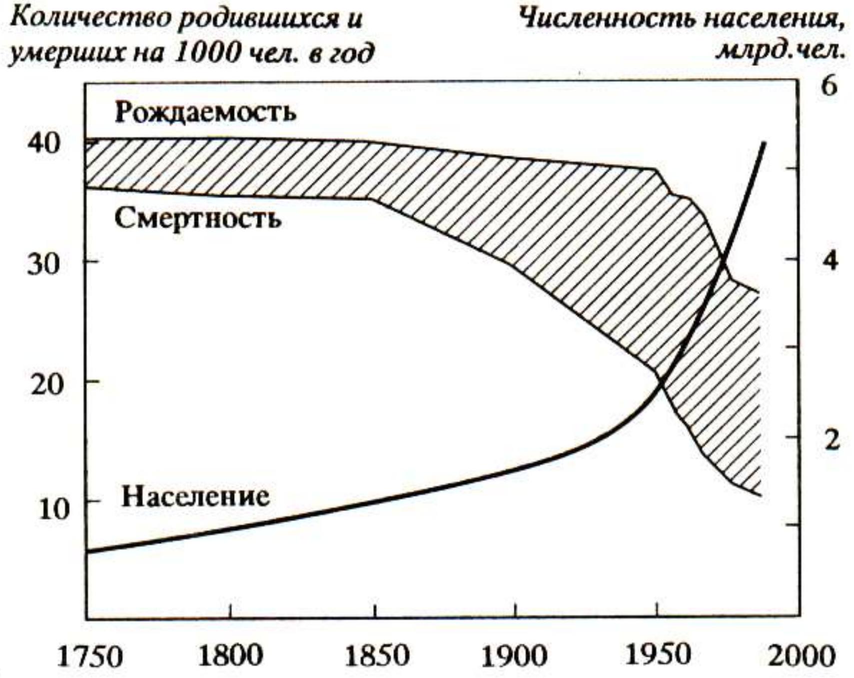

Сергей Павлович
Курдюмов

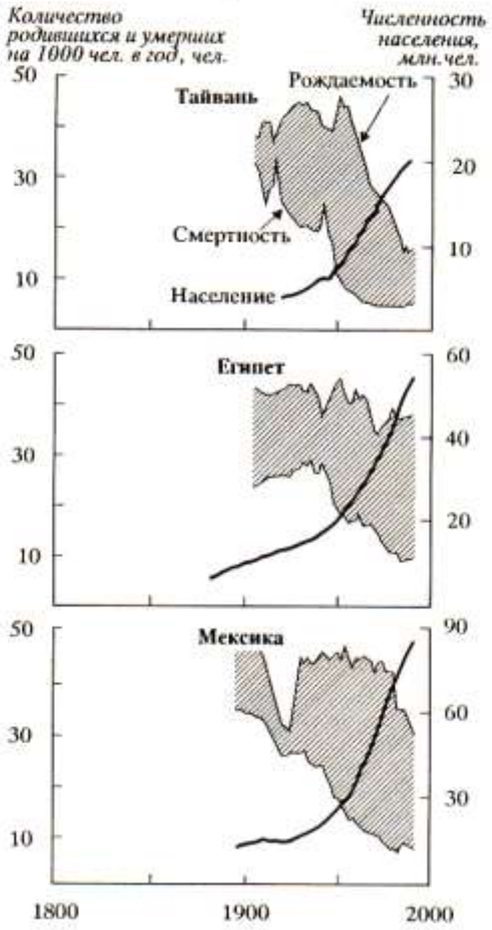
1929-2004

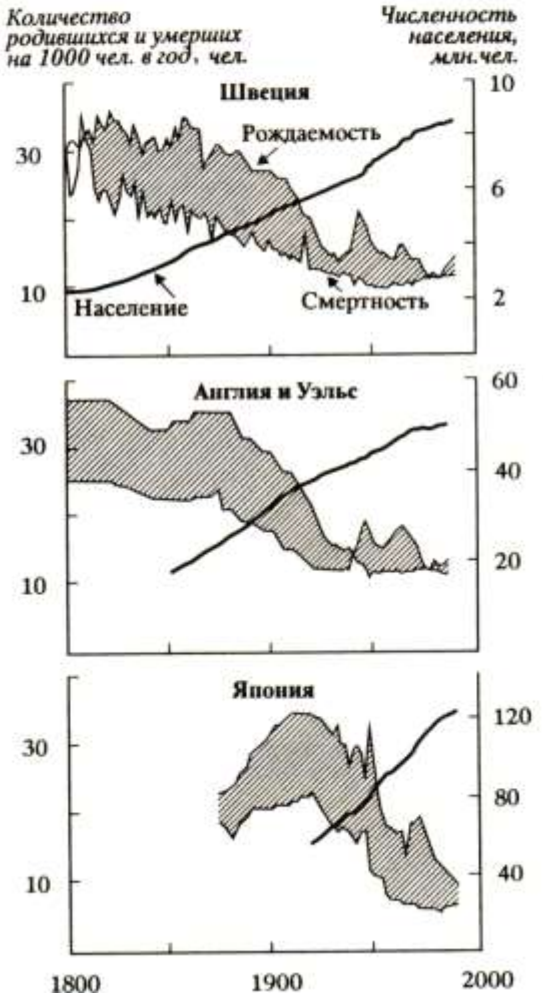
- каждую секунду рождается 21 и умирает 18 человек, население Земли ежедневно увеличивается на двести пятьдесят тысяч человек, ежегодно – на 90 млн человек

$$N = \frac{C}{T_1 - T} = \frac{200 \times 10^9}{2025 - T}. \quad (1)$$

# Прирост численности населения (пополнение)




$$N = \frac{C}{\tau} arcctg \frac{T_1 - T}{\tau},$$

# С учетом демографического перехода

$$N = \frac{C}{\tau} \operatorname{arcctg} \frac{T_1 - T}{\tau},$$

$C = 186 \times 10^9$ лет, $T_1 = 2007$ год, $\tau = 42$ года,

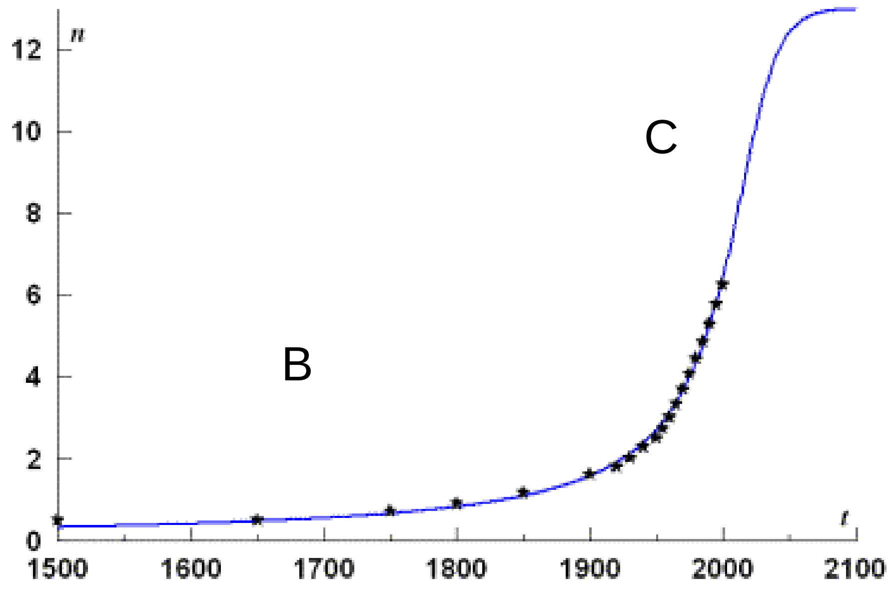
$K = \sqrt{C/\tau} = 67000.$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n^2 (n_t - n)}{C / n_t}$$

$n_t$ – численность на момент демографического перехода

Андрей Подлазов, ИПМ

# Численность человечества




В первой - эпохе А, длительностью 2,8 миллиона лет - происходит линейный рост, переходящий затем в гиперболический рост эпохи В, который завершается после 1965 года демографическим переходом С.

После демографического перехода прирост численности на протяжении жизни поколения становится сравнимым с самим населением мира. И численность начнет стремиться к асимптотически стабилизированному режиму эпохи С, то есть неуклонно приближается к пределу в 14 миллиардов. Это в 2,5 раза больше, чем в настоящее время.

# Модель глобального роста

- Невозможно решить проблему на том уровне, на котором она возникла. Нужно стать выше этой проблемы, поднявшись на следующий уровень
  - Альберт Эйнштейн

- Forrester J.W. World dynamics. 1971
- Форрестер Дж. Мировая динамика. М., Наука,1978

- Meadows D. et al., The limits to growth. 1972
- Meadows D. et al. The dynamics of the growth in a finite world. 1974

- Медоуз Д. и др., Пределы роста, изд. МГУ, 1991

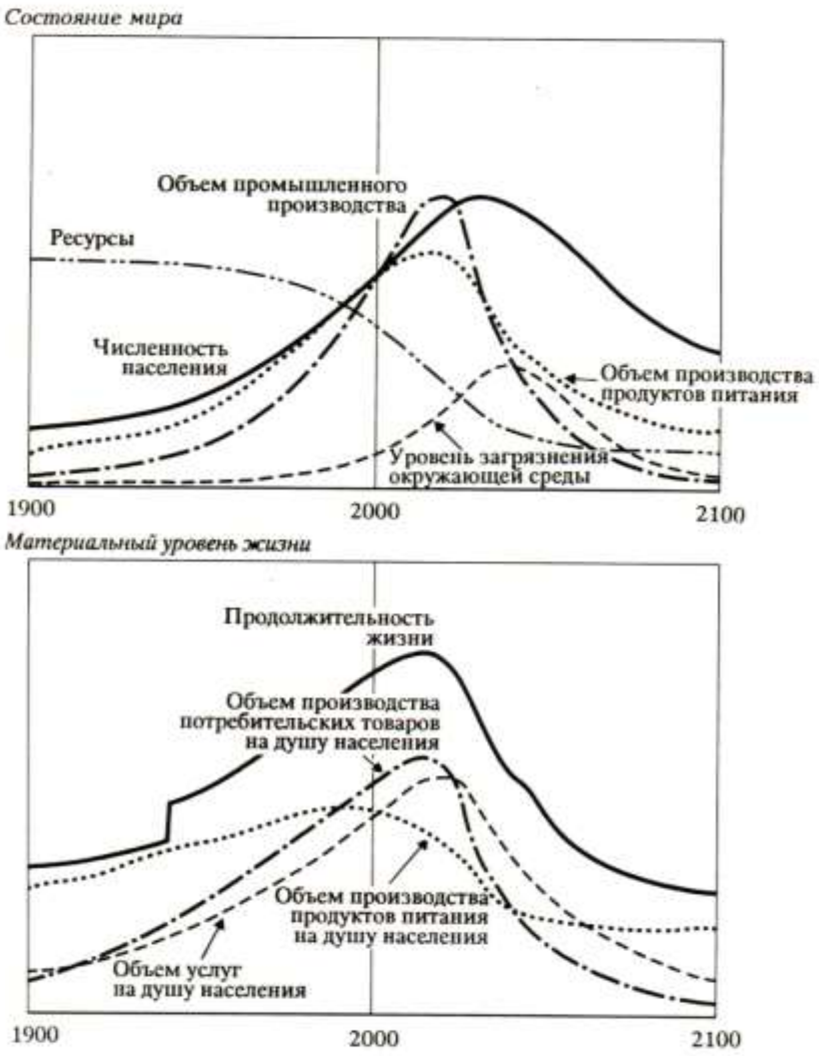
  За пределами роста 1994

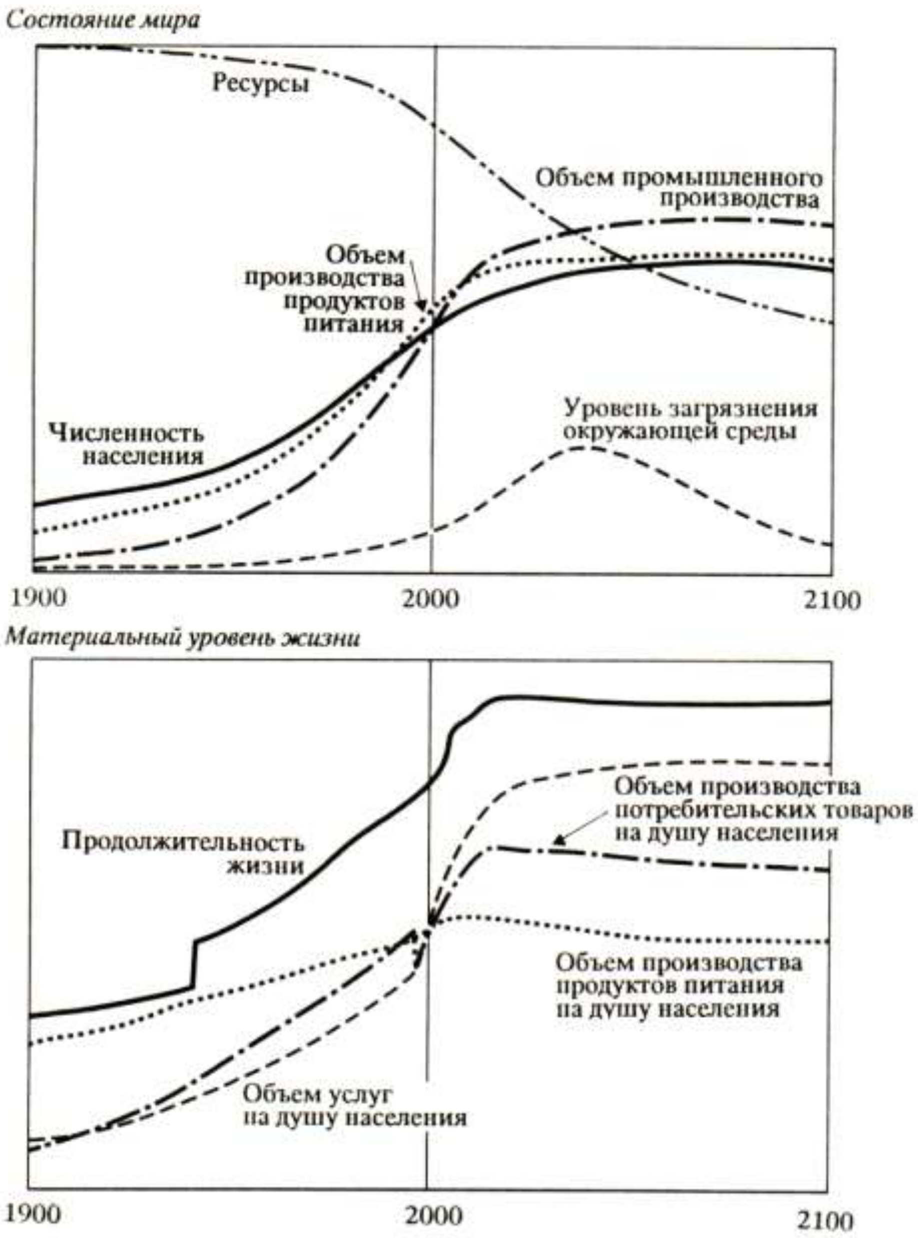
  Пределы роста 30 лет спустя. 2008

  АЗБУКА СИСТЕМНОГО МЫШЛЕНИЯ. Бином 2011

# Принятие мер в 1980 году

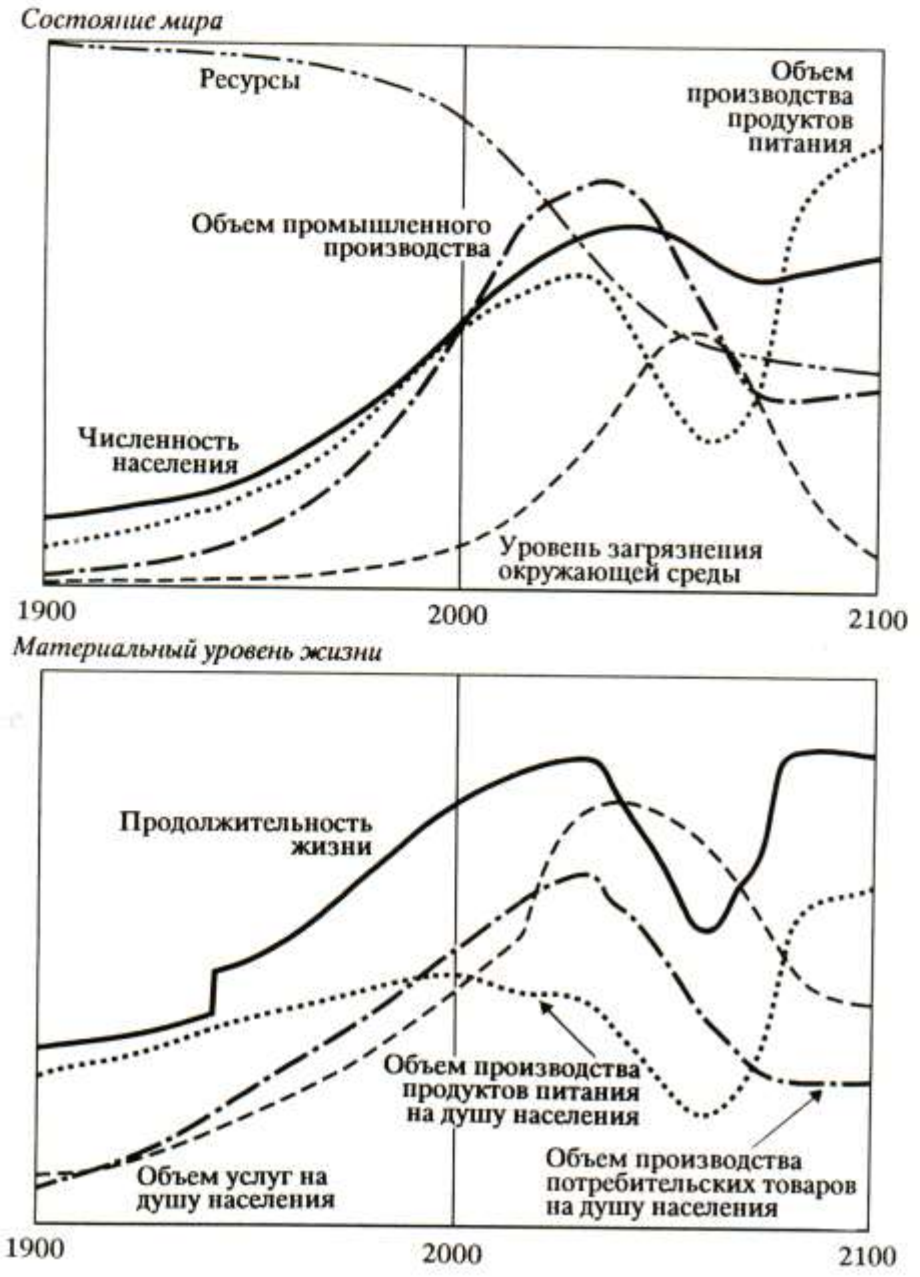
Тренды 1970 х



# Принятие мер в 2015 году

Запаздывание в принятии мер предотвращения кризиса



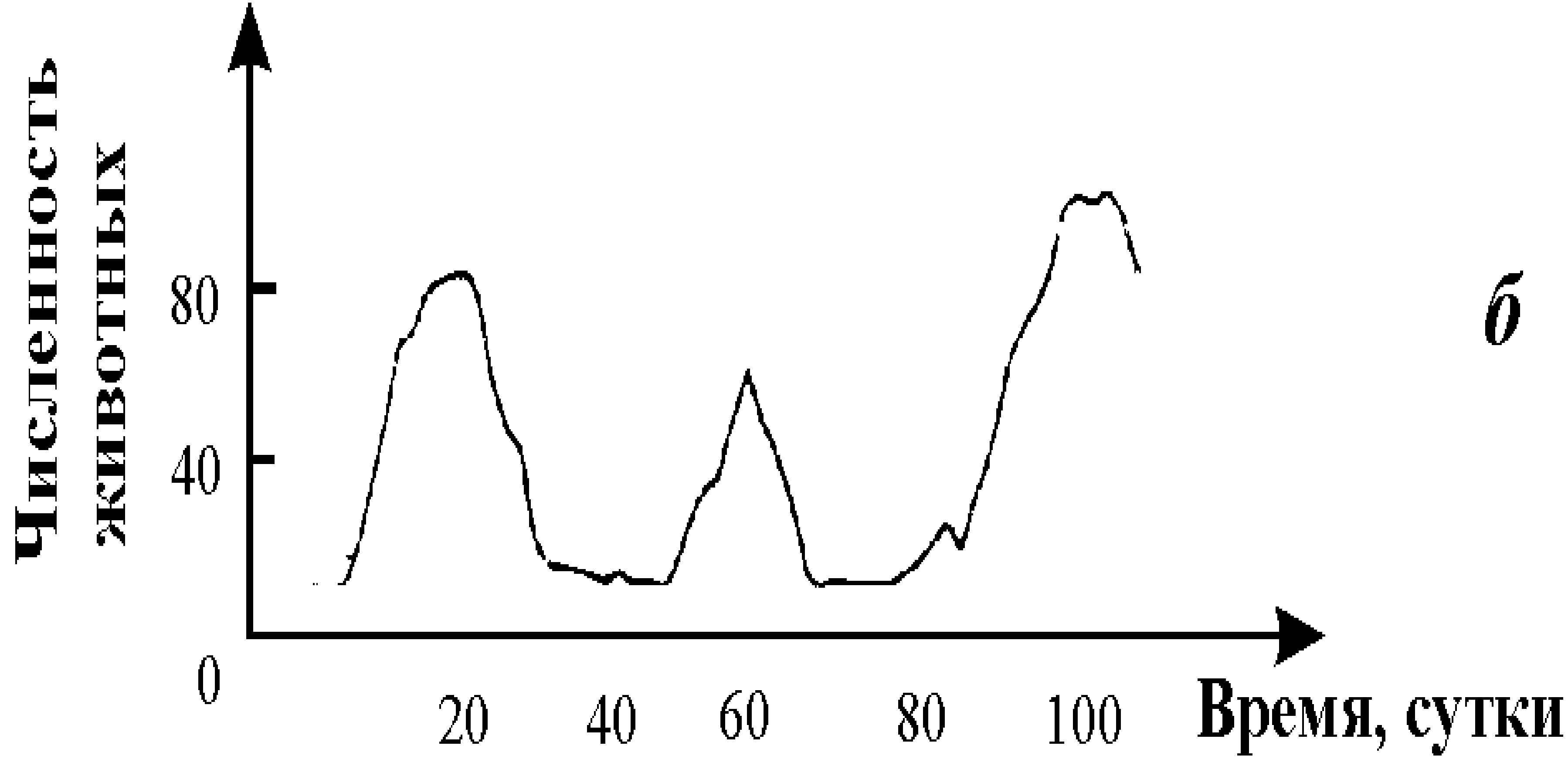
Численность населения Земли, млрд
Оценка Бюро переписи США
Данные и прогноз отдела народонаселения ООН
Вероятностный прогноз Сергея Щербова,
заведующего лабораторией динамики и прогнозирования численности населения в венском Институте демографии
По оценке демографа Бюро населения США Карла Хауба, за всю историю человечества было рождено около
108 миллиардов человек
6,5% из них живут в наше время
Население Земли достигло миллиарда
Верхняя оценка количества людей
Нижняя оценка количества людей
1804 1
1927 2
20.10.1959 3
27.06.1974 4
21.01.1987 5
5.12.1998 6
31.10.2011 7
2050 9,4
Вероятность
95 %
60%
20%
медиана
2,50
2,25
2,00
1,75
1,50
1,25
1,00
0,75
Прогноз Щербова: численность населения Земли при предельных уровнях рождаемости от 0,75 до 2,5 детей на женщину и при росте продолжительности жизни до 120 лет
0,010
0,001
0,020
0,005
0,206
0,190
0,400
0,170
0,345
0,254
0,540
0,425
1,402
1,128
1,762
1,550
2,556
10 000 до н.э.
5000 до н.э.
н.э.
500
1000
1500
1800
1850
1900
1950
2000
2050
2100
2150
2200

# Динамика численности популяции

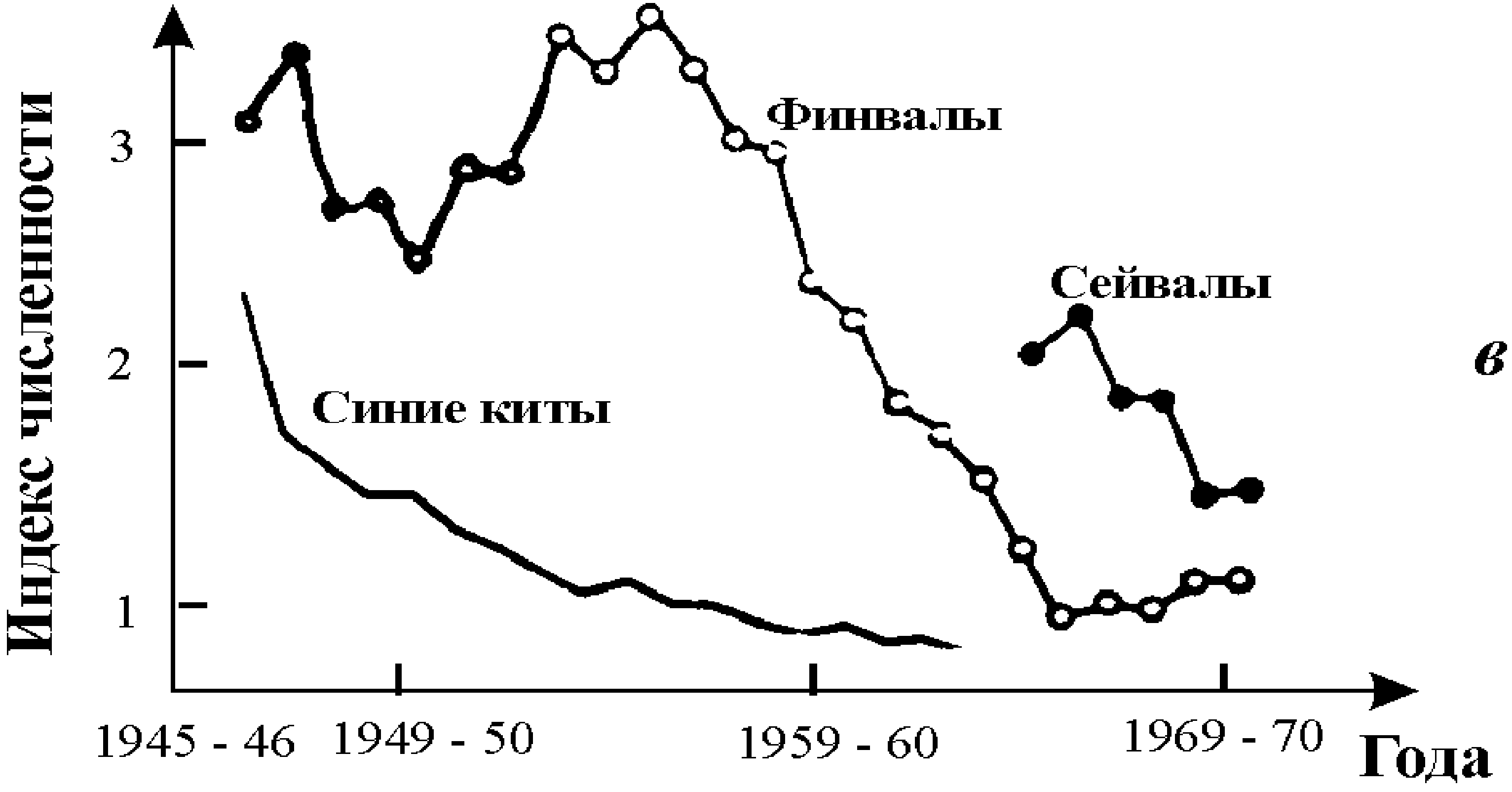
- Численность может меняться во времени различным образом: расти, совершать колебания, падать.

# Численность поголовья овец на острове Тасмания (*Davidson*,1938)

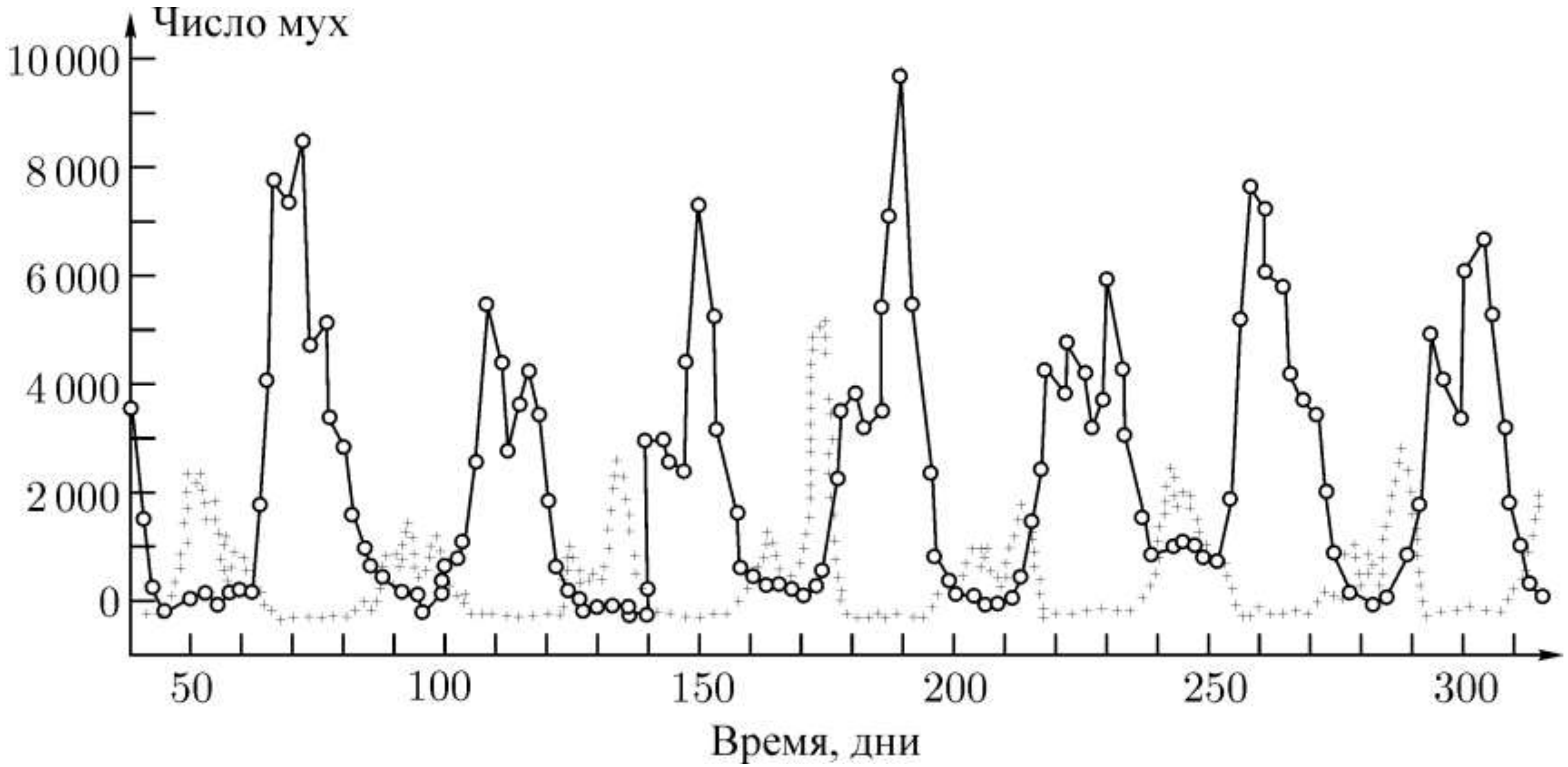
# Изменение численности *Daphnia magna* (*Frall*, 1943)



Динамика численности трех видов китов в Антарктике (приведена по изменению «индекса численности» убитых китов на 1 тыс. судо - тонно - суток, *Gulland*, 1971)



Численность мух Lucilia  в популяционном ящике (Nicholson, 1954) 1 – взрослые особи. Крестики – число яиц, отложенных за один день



# Причины, обуславливающие тип динамики популяции:

- Собственные свойства популяции
- 
- Изменение параметров окружающей среды
- 
- Взаимодействие видов

# Дискретные модели популяций

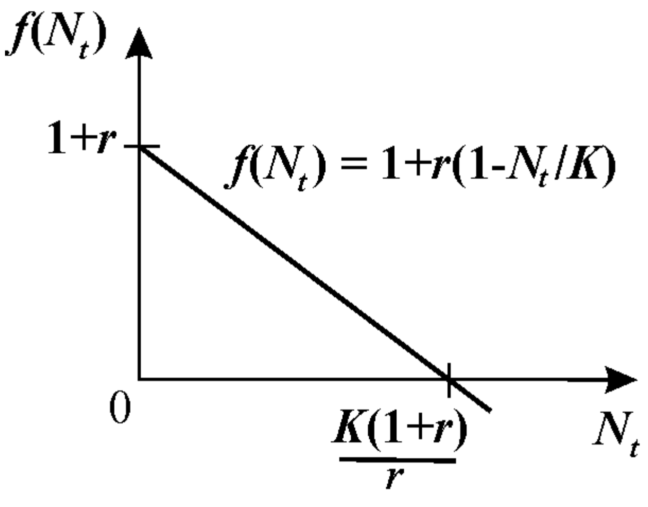
Монотонный и немонотонный рост
Колебания
хаос

# Дискретный аналог логистического уравнения

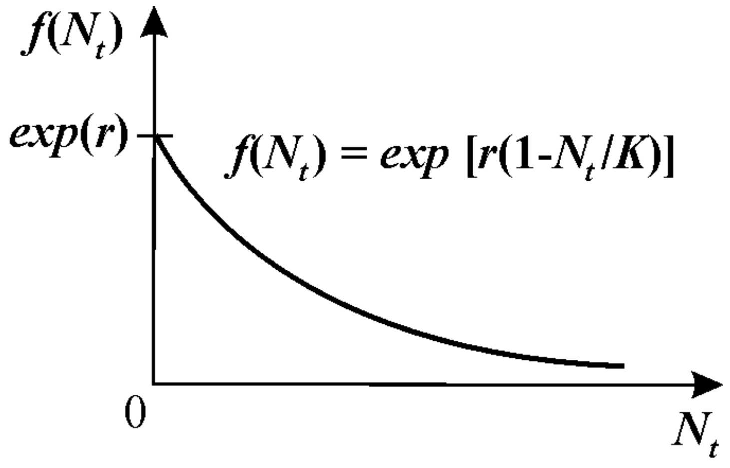
$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$N_{t+1} = N_t\left[1 + r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right]$$

$N_{t+1} = N_t \cdot f(N_t)$.



*а*



*б*

(Moran, 1950)
для численности насекомых

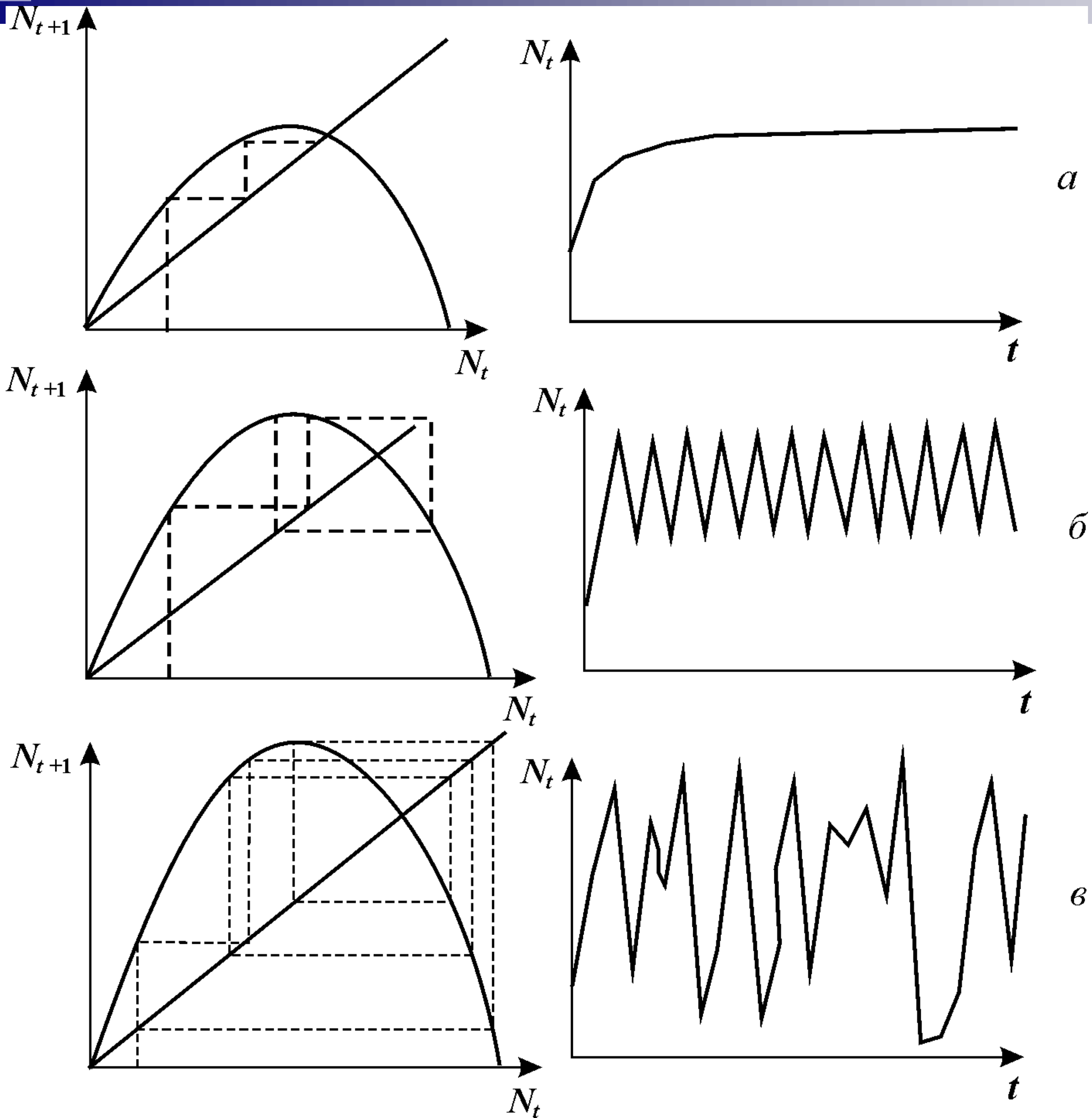
(Ricker, 1952) для рыбных популяций.

**Robert May**

1976. Simple mathematical model with very complicated dynamics. Nature 261, p.459

1986. When two and two make four: Nonlinear phenomena in ecology. Proc.R.Soc. London v.228: p.241-268

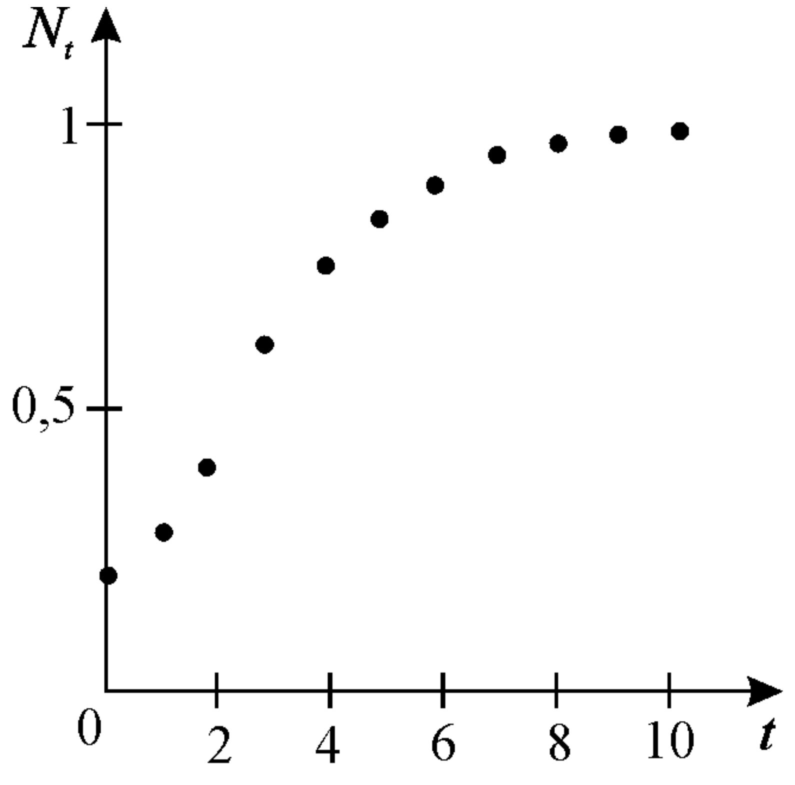
- Вероятно, для всех нас было бы гораздо лучше, если бы не только при обучении или в научной работе, но и в повседневной политической и экономической жизни как можно большее число людей поняло, что простые динамические системы не обязательно демонстрируют простое поведение.



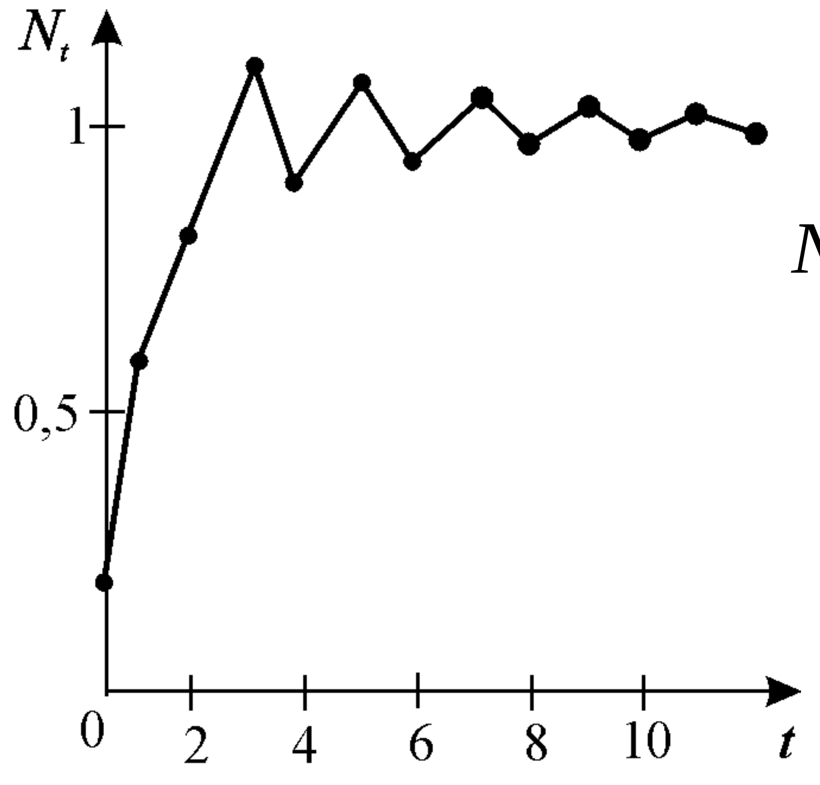

Квадратичное отображение

$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$

*Равновесие устойчиво*, если $0<r<2$,
решение *монотонно* при $0 < r < 1$ и представляет собой *затухающие колебания* при $1 < r < 2$.




*а*

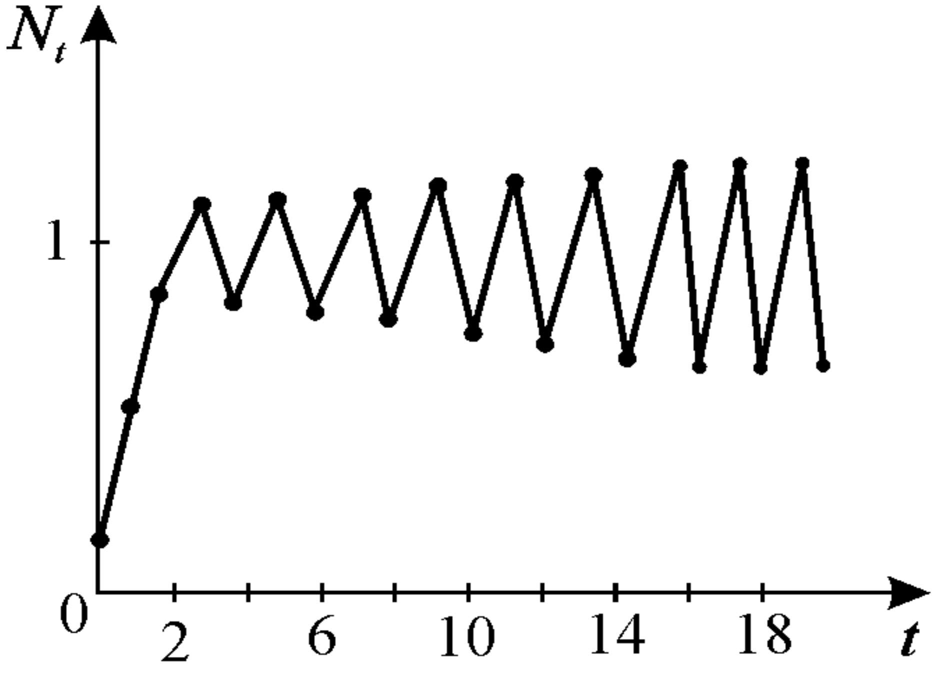



*б*

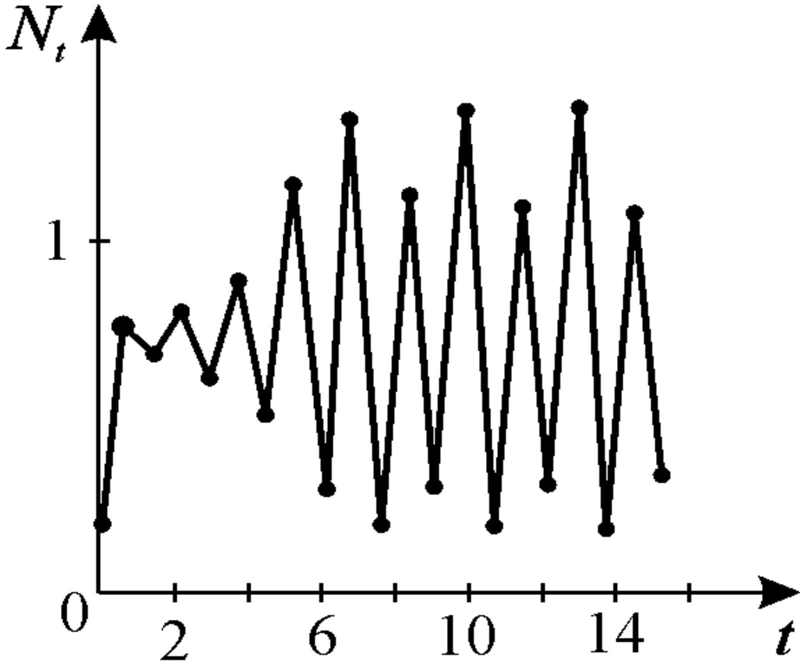
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right\}$$

при $2 < r = r_2 < 2{,}526$ – *двухточечные циклы*

при $r_2 < r < r_c$ появляются *циклы длины 4,8,16,…,2k*.



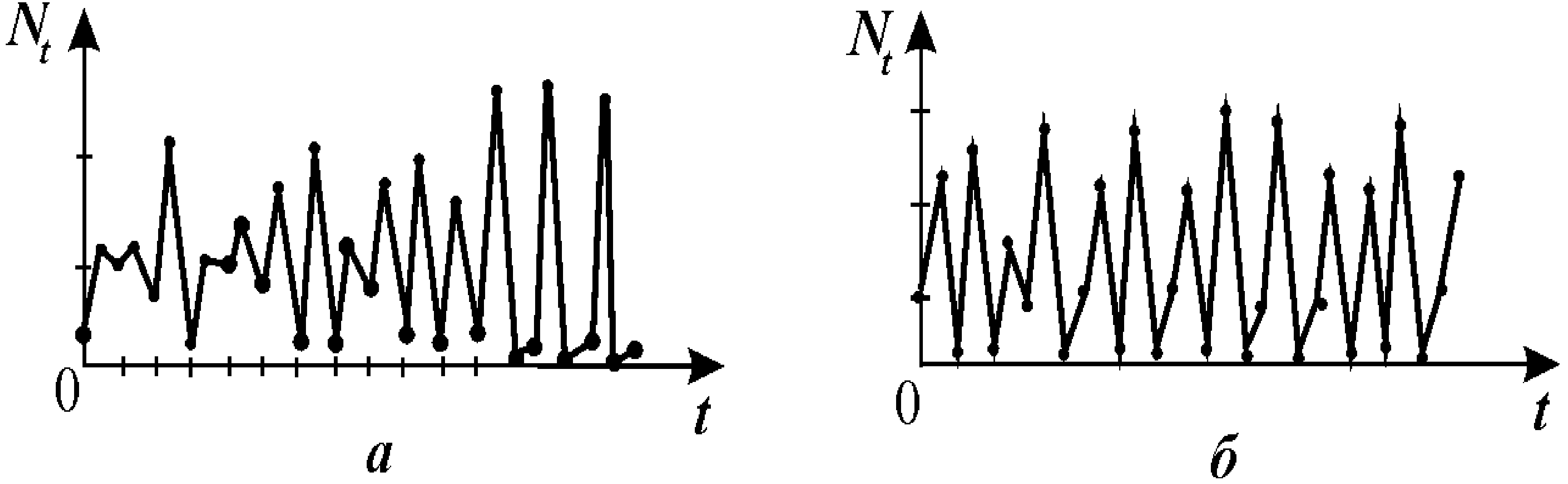

*а*




*б*

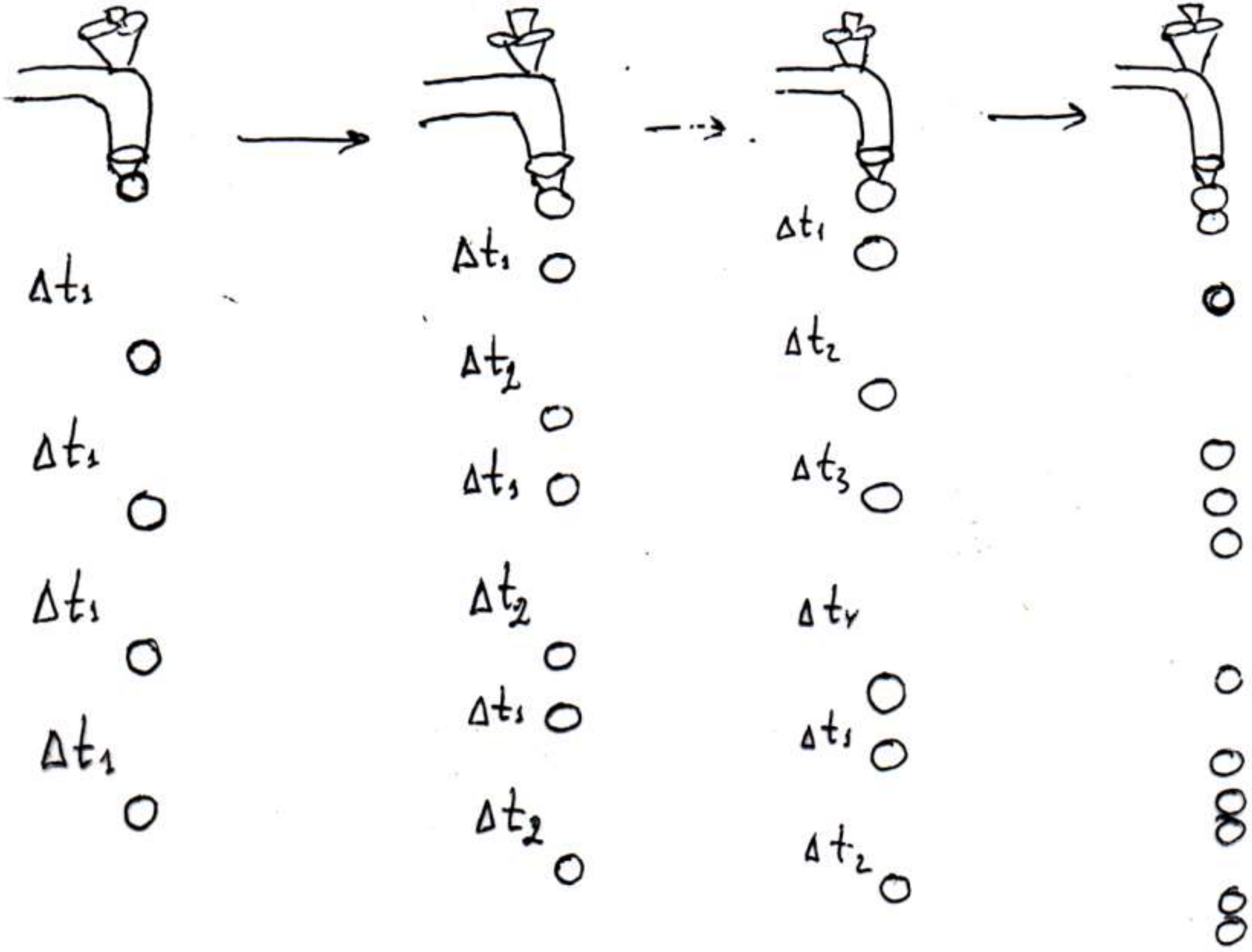
$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r(1 - \frac{N_t}{K}) \right\}$$

При $r > r_c$=3,102 решение зависит от начальных условий. Существуют *трехточечные циклы* и *квазистохастические решения.*

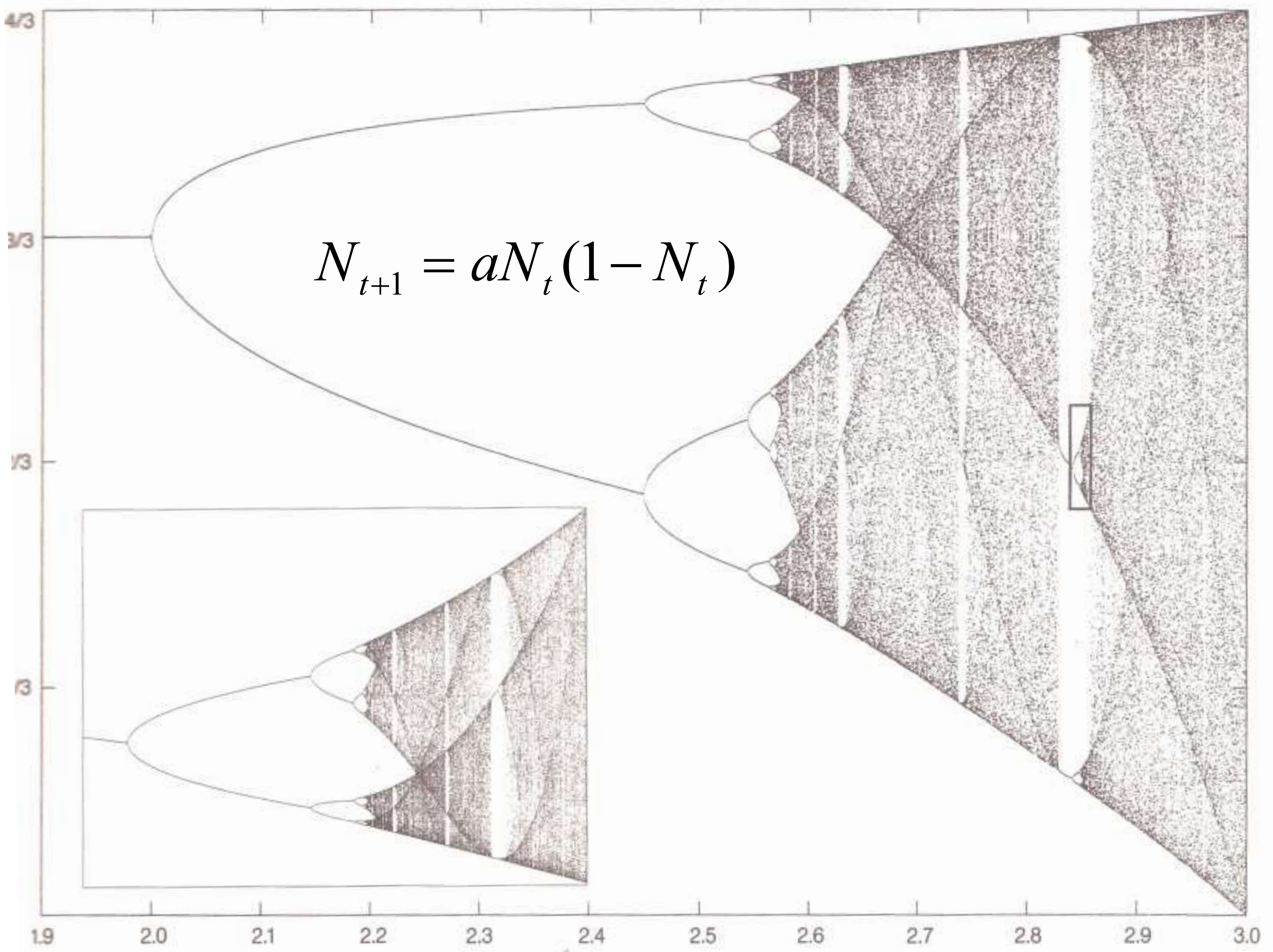



$$N_{t+1} = N_t \exp\left\{ r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right) \right\}$$

Переход к хаосу через удвоение периода

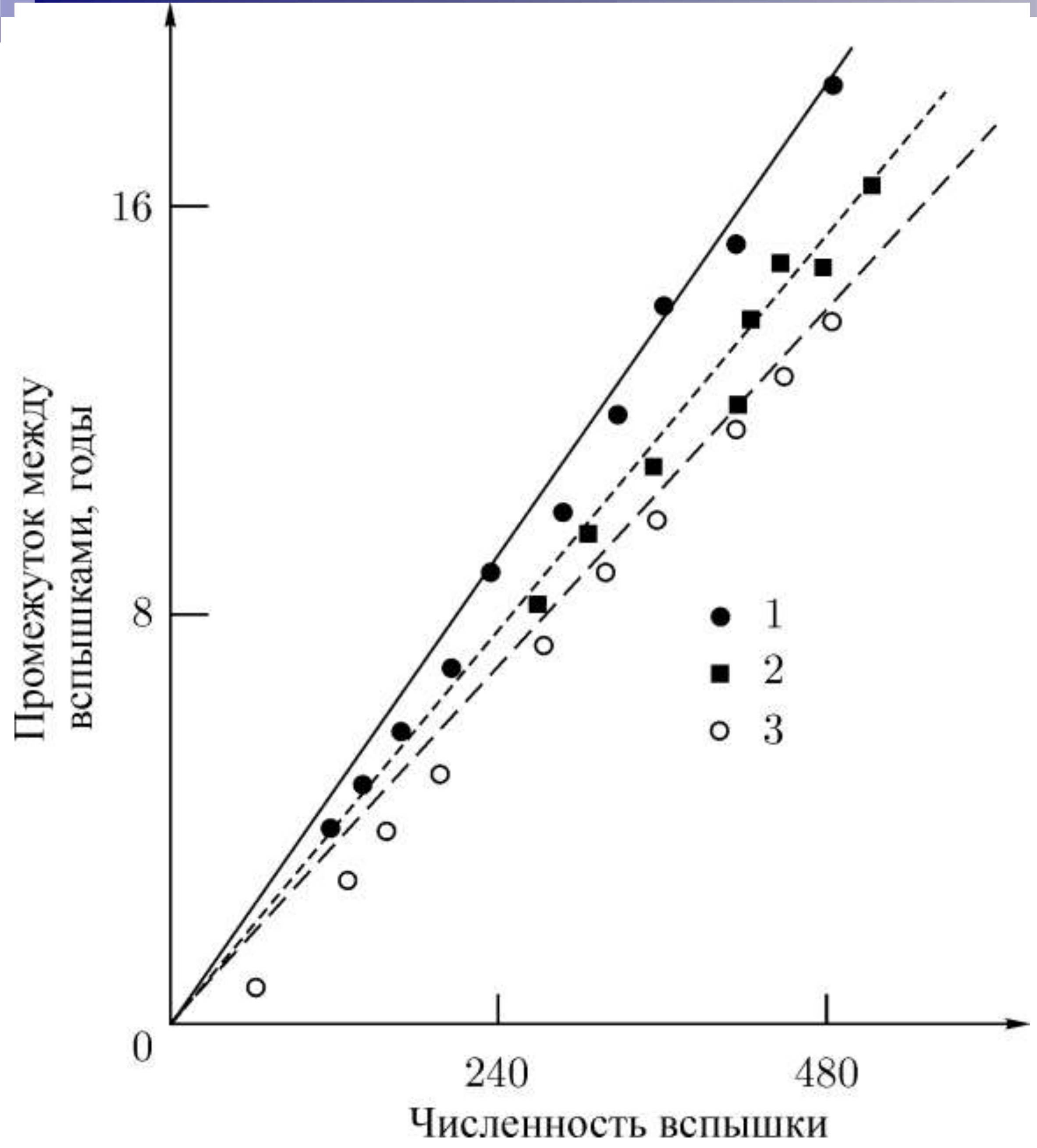


# Бифуркационная диаграмма перехода к хаосу через удвоение периода



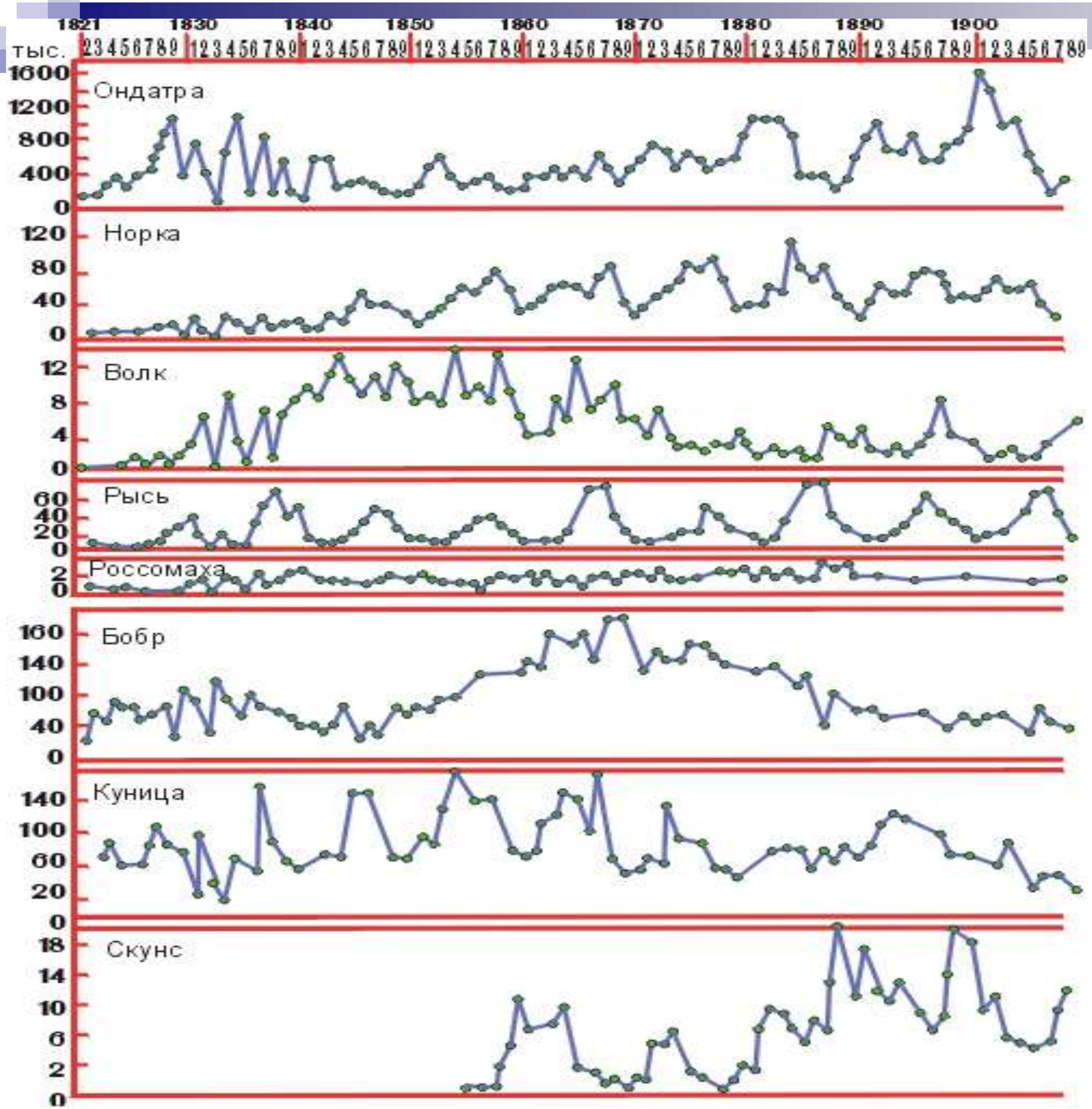

$$N_{t+1} = aN_t(1 - N_t)$$

Параметр $a$




Если функция F(N) имеет один экстремум и точку перегиба на падающей части, то чем больше амплитуда вспышки, тем длительнее интервал малых численностей популяции

Vandermeer, 1982




*Ernest Thompson Seton*
*1860-1946*

Кинетические кривые численности пушных зверей по данным компании Гудзонова залива.
(Сетон-Томсон, Торонто, 1911)