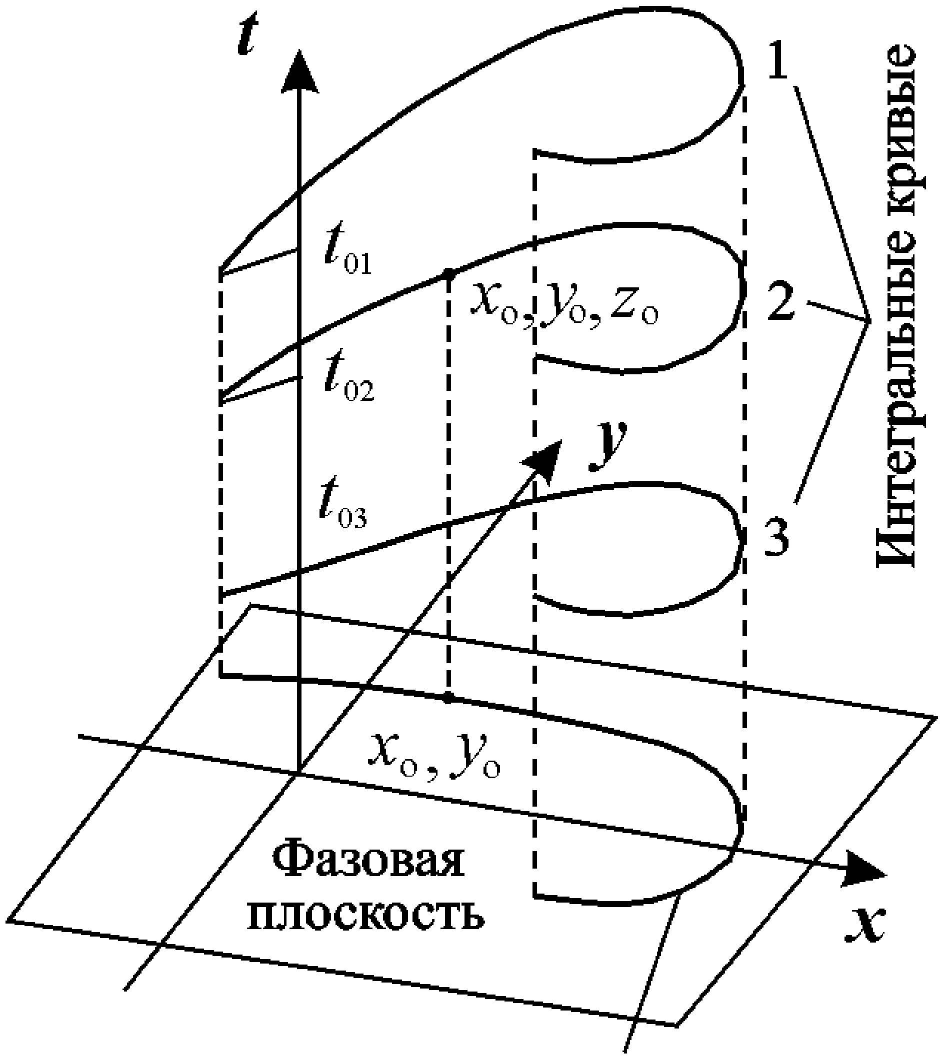
Фазовая плоскость

Г.Ю.Ризниченко

Качественное исследование

Анализ устойчивости стационарного состояния системы двух автономных дифференциальных уравнений



Траектории системы в пространстве (x,y,t)

Жюль Анри Пуанкаре́
(Jules Henri Poincaré)
1854-1912)

Типы устойчивости стационарного состояния

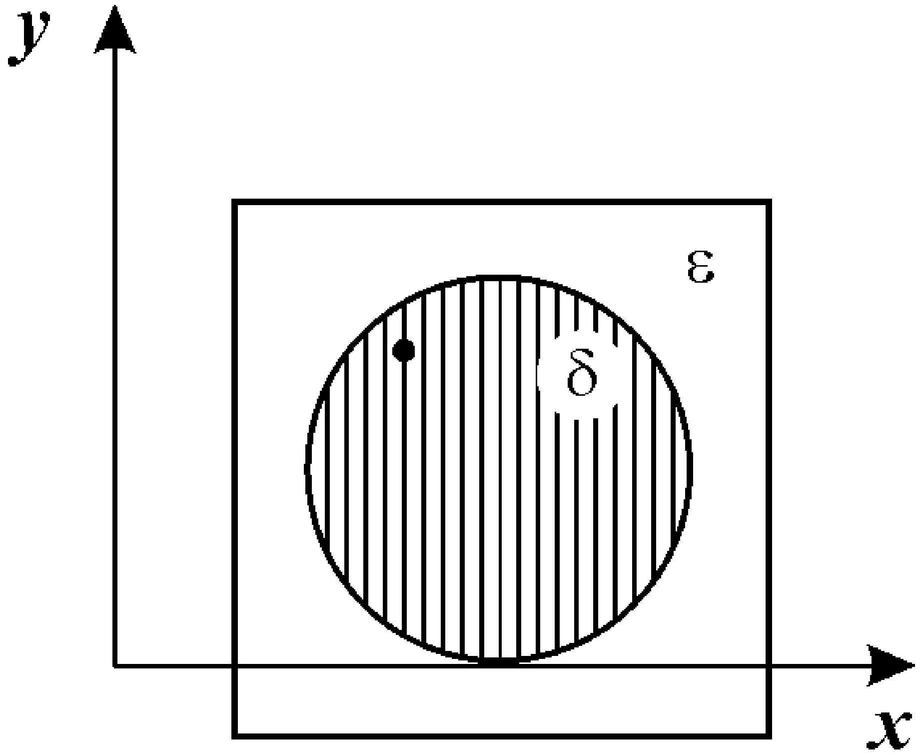
$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),$$
$$\frac{dy}{dt}=Q(x,y).$$

Ляпуно́в Алекса́ндр Миха́йлович (1857 –1918) – русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров.

Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей.

Определение устойчивости

- *Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ, никогда не достигнет границы ε.*



Устойчивость стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Решение ищем в виде:

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$$

$$\lambda A = aA + bB,$$

$$\lambda B = cA + dB.$$

Условие нетривиального решения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by,$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Устойчивость определяется действительной частью собственного числа λ

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}$$

$$x = Ae^{\lambda t},$$
$$y = Be^{\lambda t}$$

Если числа λ_1 λ_2 – действительны и отрицательны – устойчивый узел;

Если числа λ_1 λ_2 – действительны и положительны – неустойчивый узел

Если λ_1 λ_2 – действительны и разных знаков – седло

Если λ_1 λ_2 _ комплексно сопряженные, решение ищется в виде $x = e^{\lambda t} = e^{\operatorname{Re}\lambda t} \cdot e^{i \operatorname{Im} \lambda t}$

Мнимая часть не сказывается на устойчивости

Если $\lambda_{1,}$ λ_2 – комплексно сопряженные и Re $\lambda_{1,}$ λ_2 <0– устойчивый фокус

Если $\lambda_{1,}$ λ_2 – комплексно сопряженные и Re $\lambda_{1,}$ λ_2 >0– неустойчивый фокус

Если $\lambda_{1,}$ λ_2 – чисто мнимые и Re λ_1 λ_2 =0 – центр

Формула Эйлера $$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

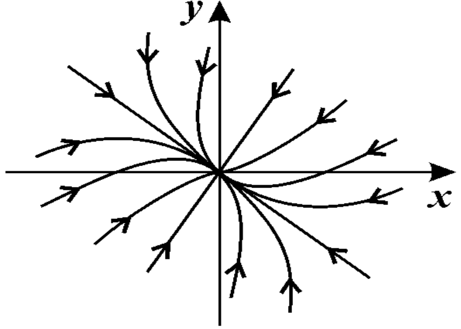
Поведение фазовых траекторий системы двух линейных ОДУ в окрестности стационарного состояния при разных значениях характеристических чисел

$$\lambda_{1,2}$$

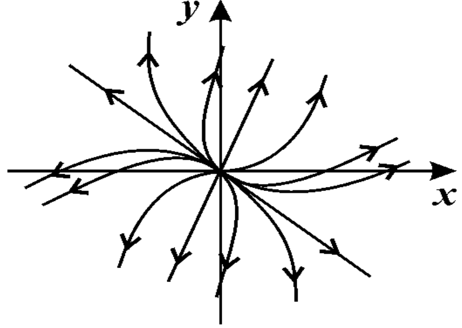
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

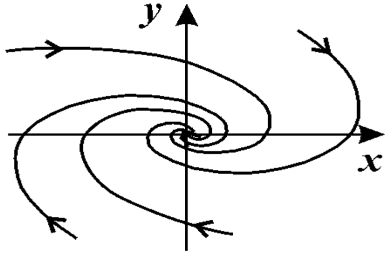
Формула Эйлера



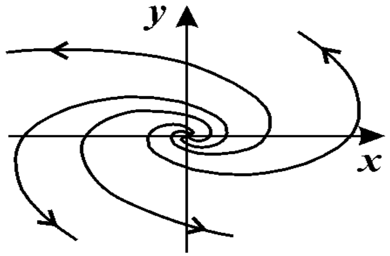
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



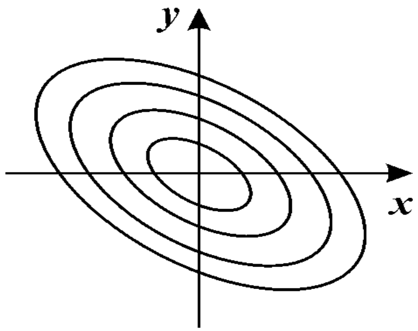
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



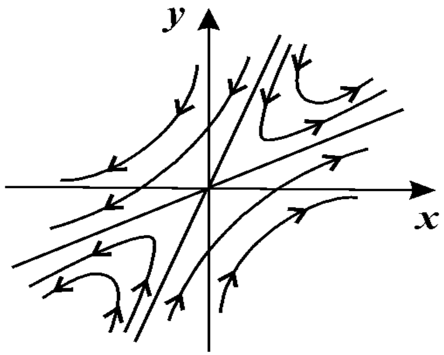
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
Re $\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны,
Re $\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)



Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

Бифуркацонная диаграмма

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by,$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$x = Ae^{\lambda t},$$
$$y = Be^{\lambda t}$$

$$\sigma = -(a+d);\ \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$

Фазово-параметрическая