Устойчивость и асимптотическая устойчивость

Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y$$

Vito Volterra

X – численность жертв

Y – численность хищников

Вольтерра Вито (1860 —1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

Характеристическое уравнение для ненулевого стационарного состояния

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\beta\dfrac{\delta}{\gamma} \\ \gamma\dfrac{\alpha}{\beta} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \alpha\delta = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\alpha\delta}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

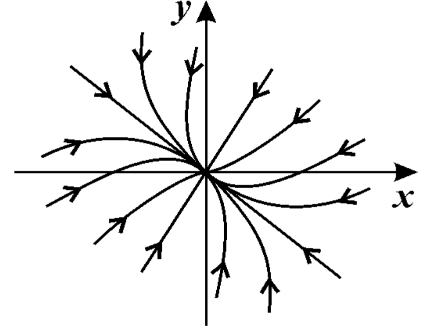
Поведение фазовых траекторий системы двух линейных ОДУ в окрестности стационарного состояния при разных значениях характеристических чисел

$$\lambda_{1,2}$$

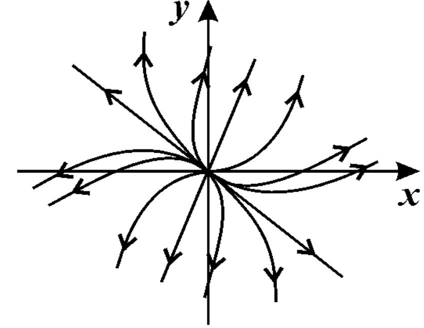
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

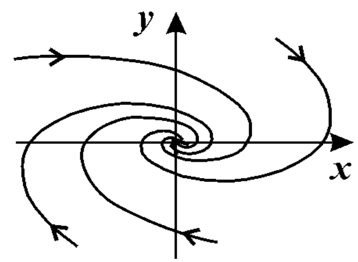
Формула Эйлера



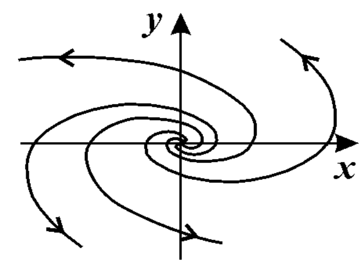
Устойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и отрицательны)



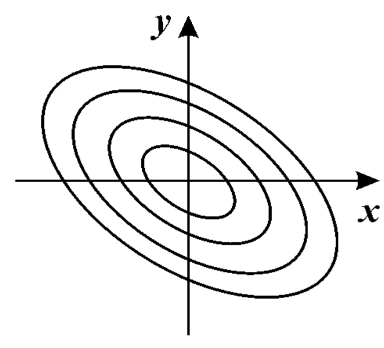
Неустойчивый узел.
(λ_1, λ_2 действительны и положительны)



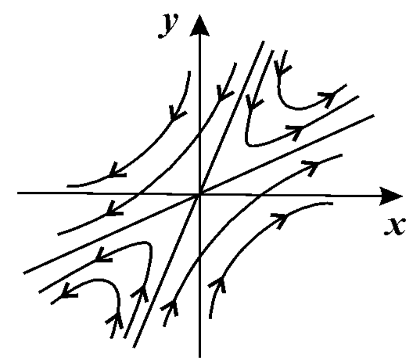
Устойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} < 0$)



Неустойчивый фокус
(λ_1, λ_2 - комплексны, Re $\lambda_{1,2} > 0$)



Центр.
(λ_1, λ_2 - чисто мнимые)

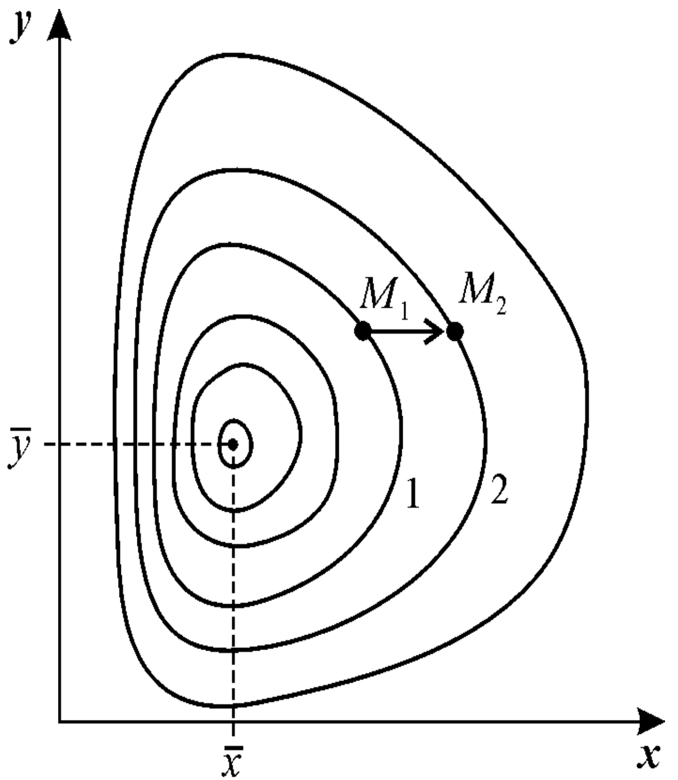


Седло.
(λ_1, λ_2 - действительны и разных знаков)

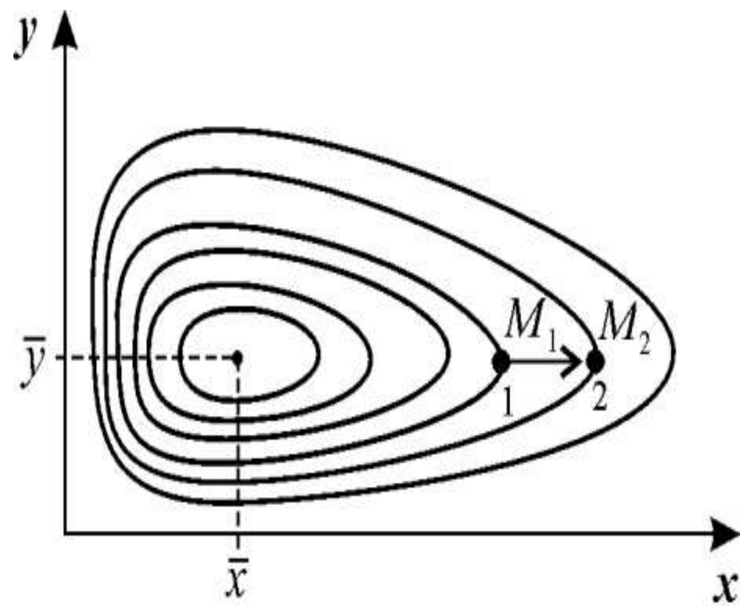
Фазовый портрет модели Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y$$



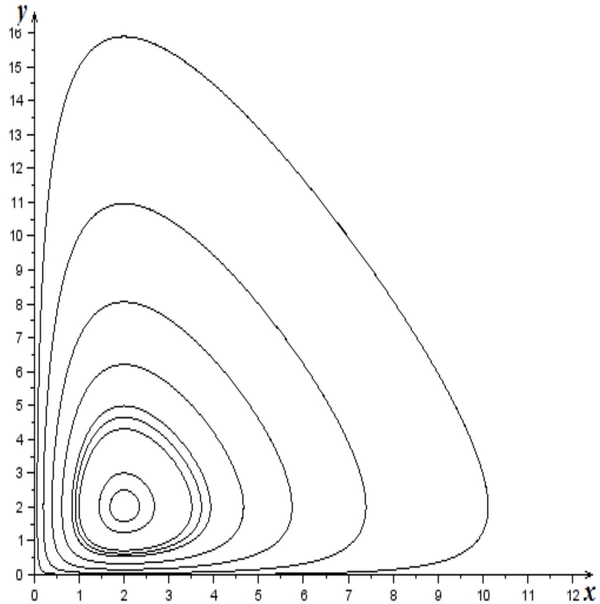
а



б

α= 4, β= 0.3, γ = 0.4, δ=0.4

α =2, β = 0.3, γ = 0.4, δ=0.4



Volterra predator–prey model describing continuous oscillations of the population numbers.

(a) phase pattern;

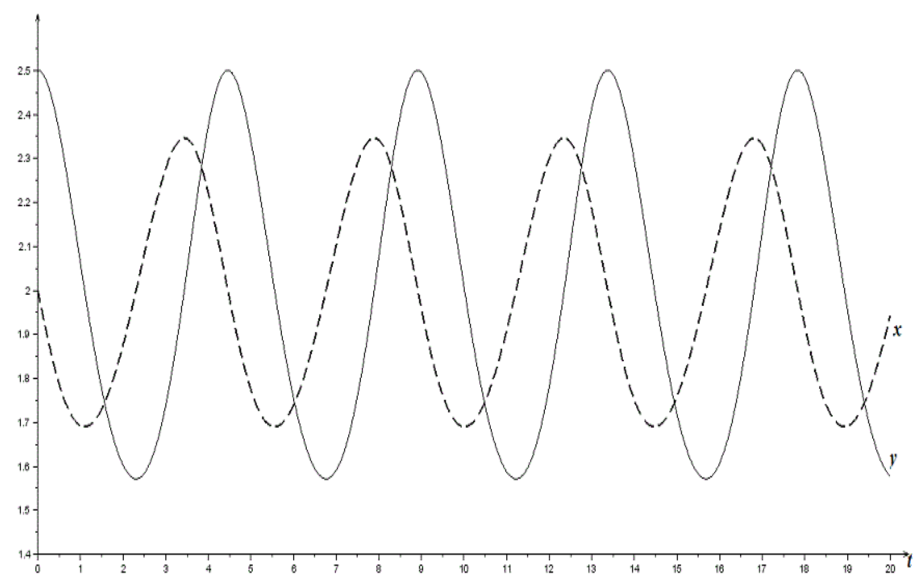
(b) dependence of the numbers of predators and preys on time.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

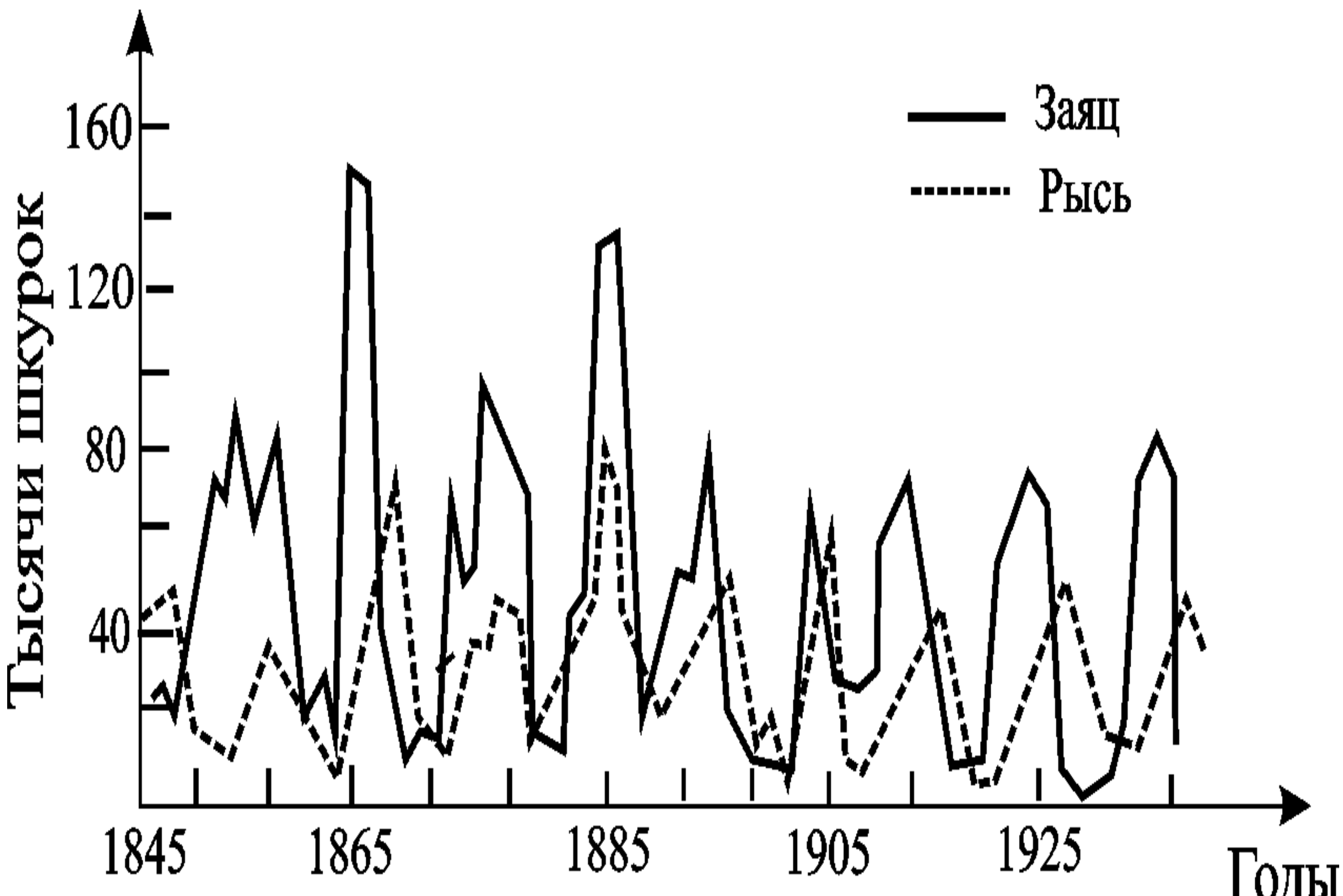
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

$$a = 1;\ b = 0.5;$$

$$c = 1;\ d = 2$$



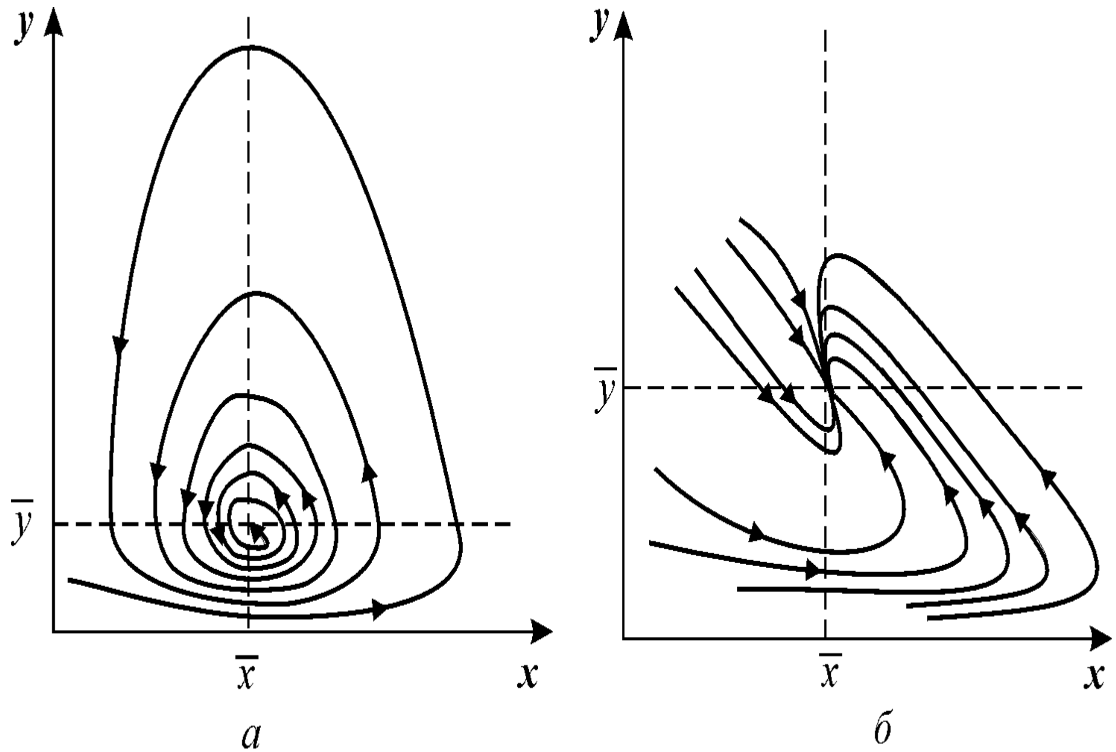
Кривые численности зайца и рыси в Канаде
(по К. Вилли, В. Детье, 1974)



Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx} x - \delta_y y).$$

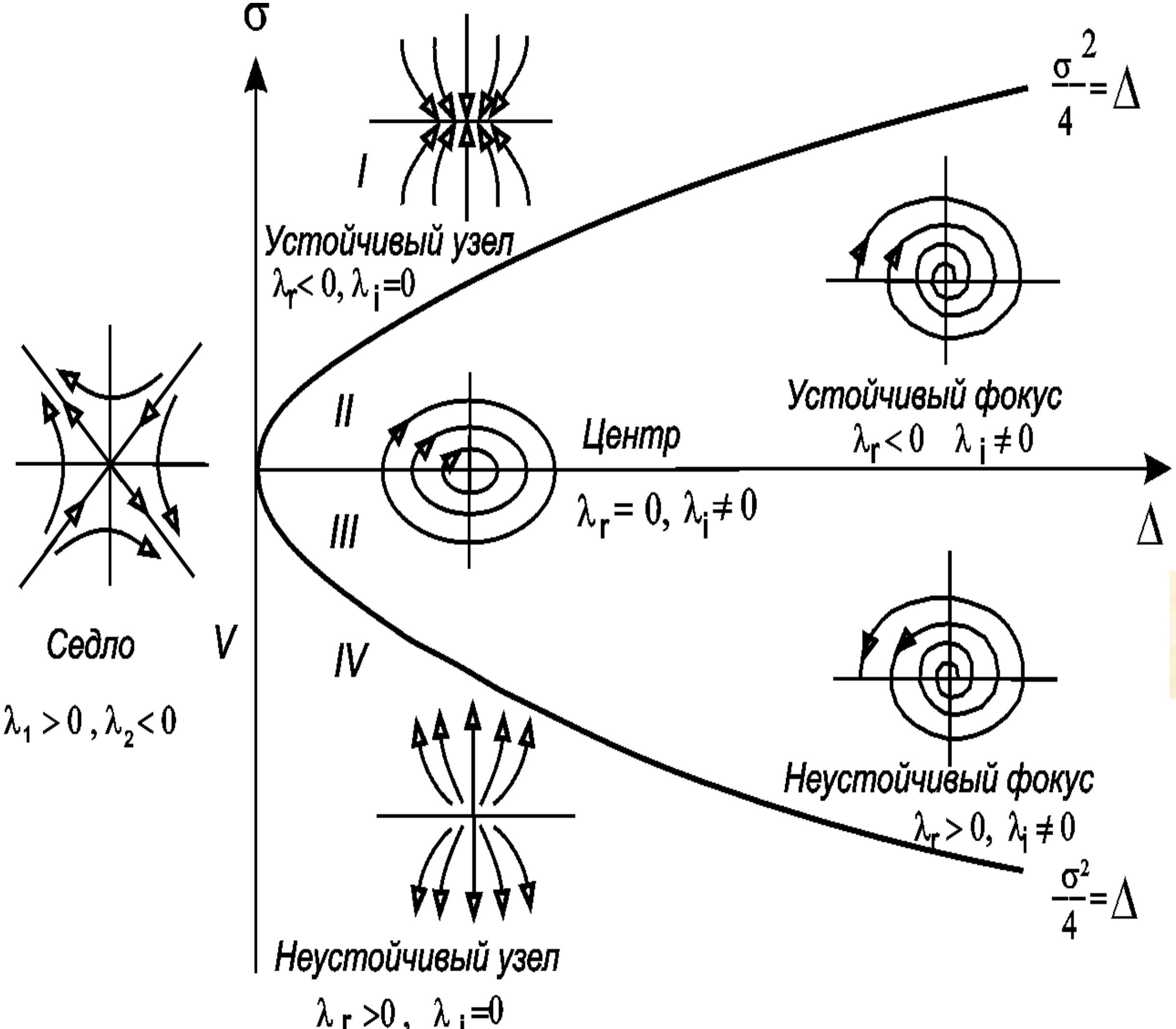
$\varepsilon_x = 2$,
$\gamma_{xy} = 18$,
$\delta_x = 1$,
$\varepsilon_y = 3$,
$\gamma_{yx} = 5$,
$\delta_y = 1$



$\varepsilon_x = 2$,
$\gamma_{xy} = 1$,
$\delta_x = 1$,
$\varepsilon_y = 3$,
$\gamma_{yx} = 1$,
$\delta_y = 1$

Бифуркацонная диаграмма

Фазово-параметрическая



$$\frac{dx}{dt}=ax+by,$$

$$\frac{dy}{dt}=cx+dy$$

$$x=Ae^{\lambda t},$$

$$y=Be^{\lambda t}$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0$$

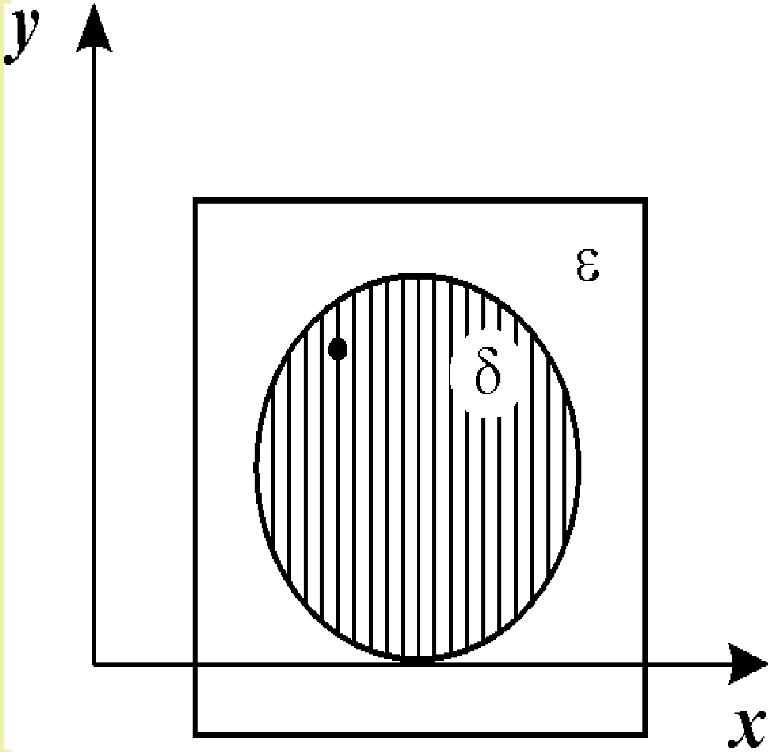
$$\lambda_{1,2}=\frac{a+d}{2}\pm\sqrt{\frac{(a+d)^2-4(ad-bc)}{4}}$$

$$\sigma=-(a+d);\ \Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-4\Delta}}{2}$$

Определение устойчивости

- *Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия (ε) можно указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области δ, никогда не достигнет границы ε.*



Определение устойчивости по Ляпунову

Состояние равновесия (стационарное состояние) *устойчиво по Ляпунову*,

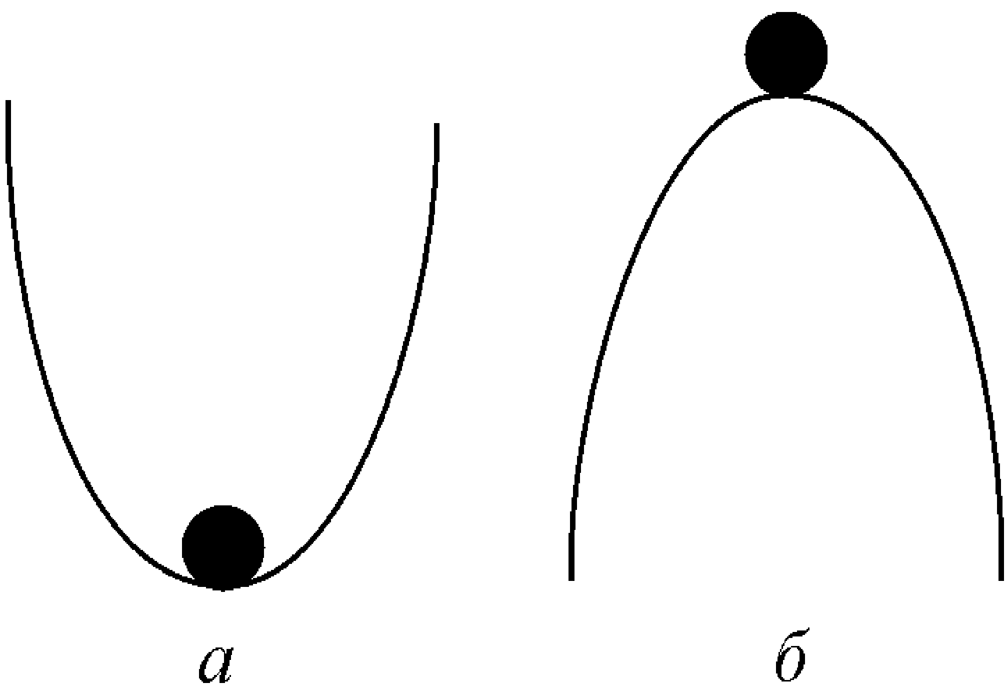
если, задав сколь угодно малое положительное ε, всегда можно найти такое

δ , что

если в начальный момент отклонение от стационарного состояния $\left|x(t_0)-\bar{x}\right|<\delta$,

то для любого последующего момента времени $t_0 \le t < +\infty$

отклонение от стационарного состояния $\left|x(t)-\bar{x}\right|<\varepsilon$



Стационарное состояние устойчиво, если малые отклонения с течением времени остаются малыми