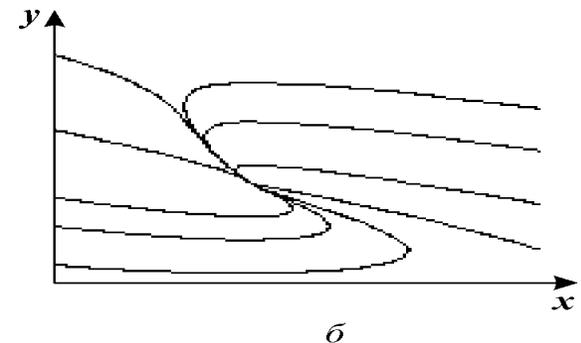
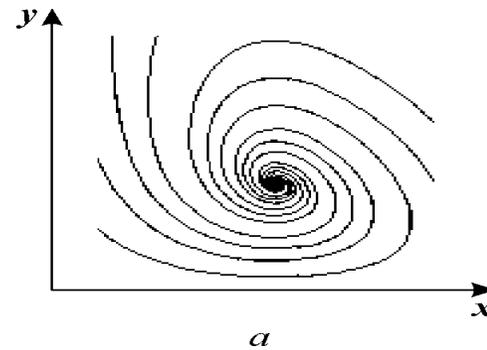
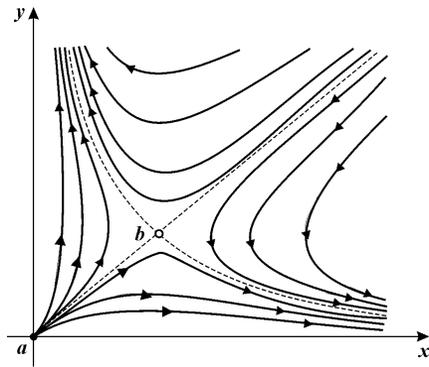
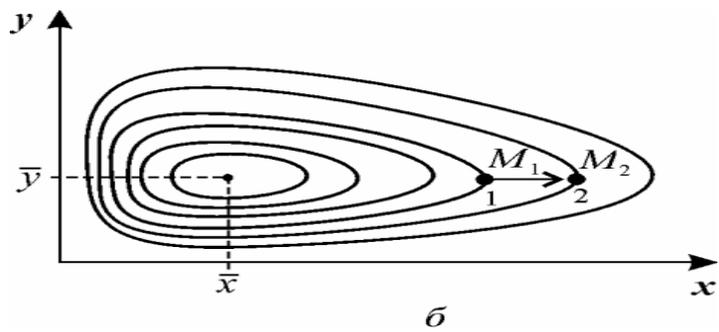


# Качественное исследование моделей, представленных системой двух дифференциальных уравнений

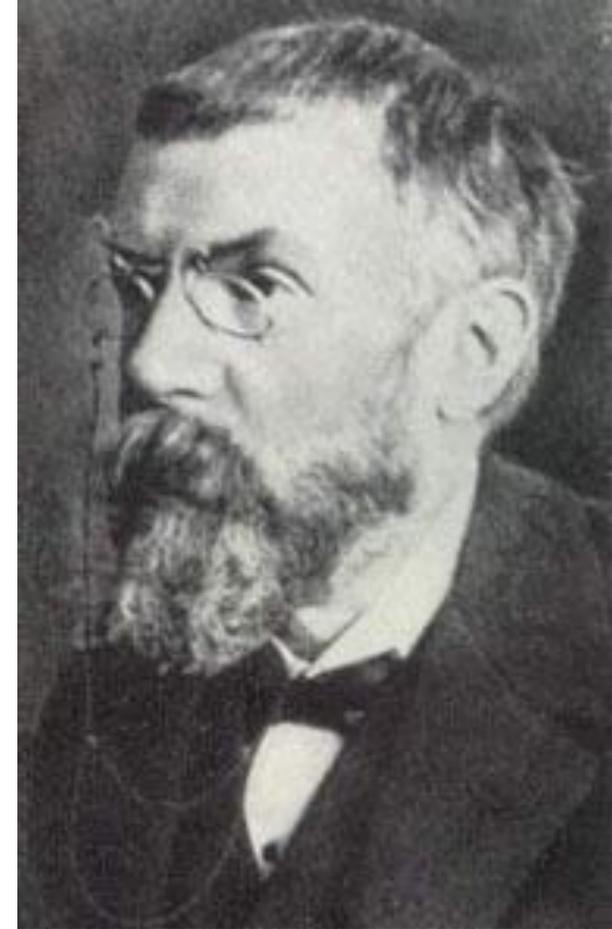
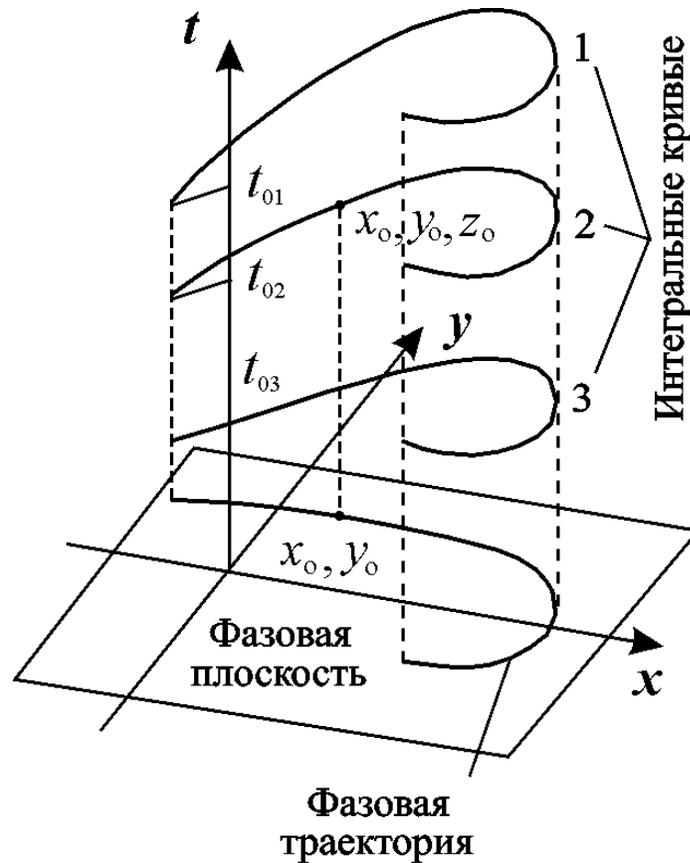
Фазовая плоскость, фазовый портрет



# Анализ устойчивости стационарного состояния системы двух автономных дифференциальных уравнений

Метод линеаризации (Метод Ляпунова)

# Траектории системы в пространстве $(x, y, t)$



**Жюль Анри Пуанкаре́**  
(Jules Henri Poincaré)  
1854-1912)

# Типы устойчивости стационарного состояния



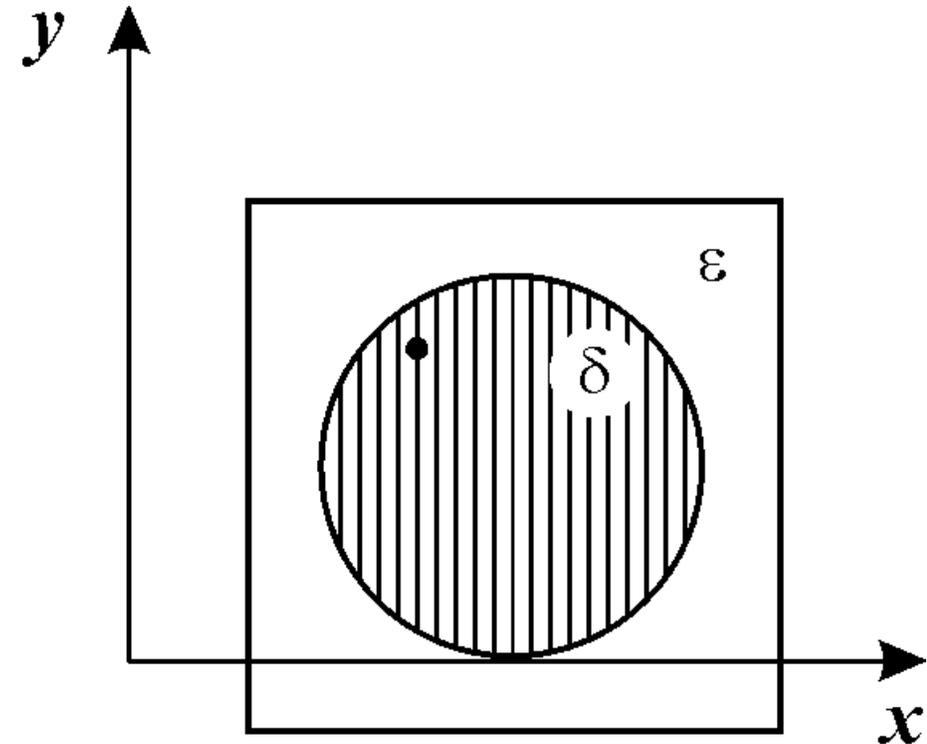
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y).\end{aligned}$$

**Ляпунов Александр Михайлович** (1857 –1918) – русский математик, создал теорию устойчивости состояний равновесия и движения механических систем с конечным числом параметров.

Работал также в области дифференциальных уравнений, гидродинамики, теории вероятностей.

# Определение устойчивости

- *Состояние равновесия устойчиво, если для любой заданной области отклонений от состояния равновесия ( $\varepsilon$ ) можно указать область  $\delta(\varepsilon)$ , окружающую состояние равновесия и обладающую тем свойством, что ни одна траектория, которая начинается внутри области  $\delta$ , никогда не достигнет границы  $\varepsilon$ .*



Устойчивость  
стационарного состояния

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Решение ищем в виде:  $x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t}$

$$\lambda A = aA + bB,$$

$$\lambda B = cA + dB.$$

Условие  
нетривиального  
решения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}{4}}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by,$$
$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$x = Ae^{\lambda t},$$

$$y = Be^{\lambda t}$$

Устойчивость определяется действительной частью собственного числа  $\lambda$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

Если числа  $\lambda_1 \lambda_2$  – действительны и отрицательны – устойчивый узел;

Если числа  $\lambda_1 \lambda_2$  – действительны и положительны – неустойчивый узел

Если  $\lambda_1 \lambda_2$  – действительны и разных знаков – седло

Если  $\lambda_1 \lambda_2$  – комплексно сопряженные, решение ищется в виде  $x = e^{\lambda t} = e^{\operatorname{Re} \lambda t} \cdot e^{i \operatorname{Im} \lambda t}$

Мнимая часть не сказывается на устойчивости

Если  $\lambda_1, \lambda_2$  – комплексно сопряженные и  $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 < 0$  – устойчивый фокус

Если  $\lambda_1, \lambda_2$  – комплексно сопряженные и  $\operatorname{Re} \lambda_1, \lambda_2 > 0$  – неустойчивый фокус

Если  $\lambda_1, \lambda_2$  – чисто мнимые и  $\operatorname{Re} \lambda_1 \lambda_2 = 0$  – центр

Формула Эйлера  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

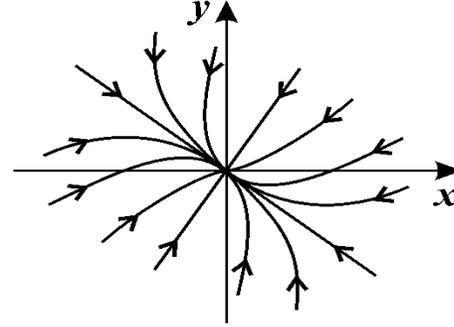
Поведение фазовых траекторий системы двух линейных ОДУ в окрестности стационарного состояния при разных значениях характеристических чисел

$$\lambda_{1,2}$$

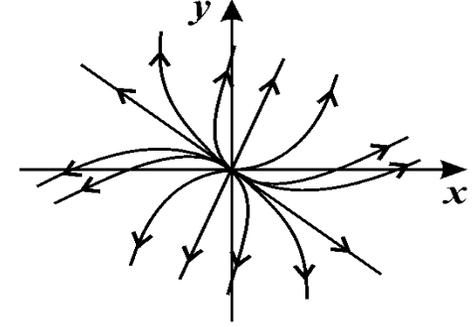
$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

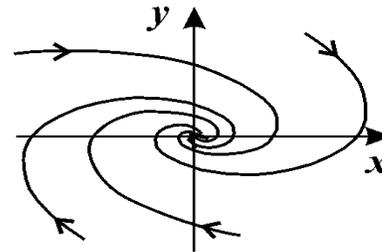
Формула Эйлера



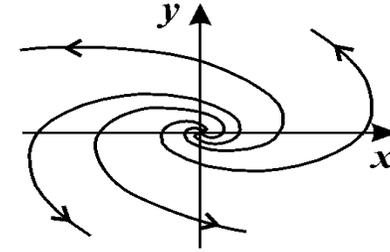
Устойчивый узел.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  действительны и отрицательны)



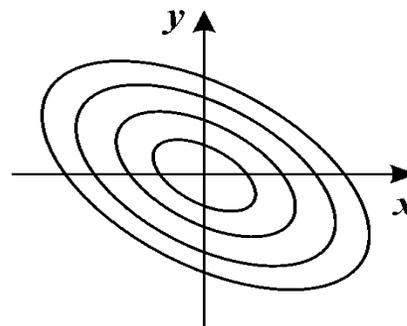
Неустойчивый узел.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  действительны и положительные)



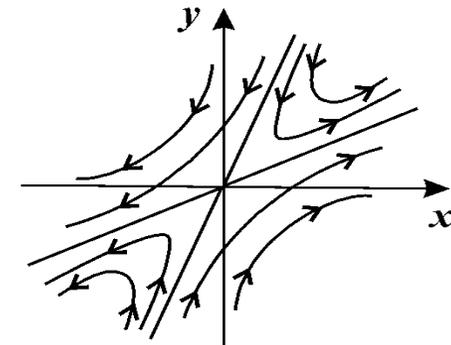
Устойчивый фокус  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексны,  $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$ )



Неустойчивый фокус  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексны,  $\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$ )



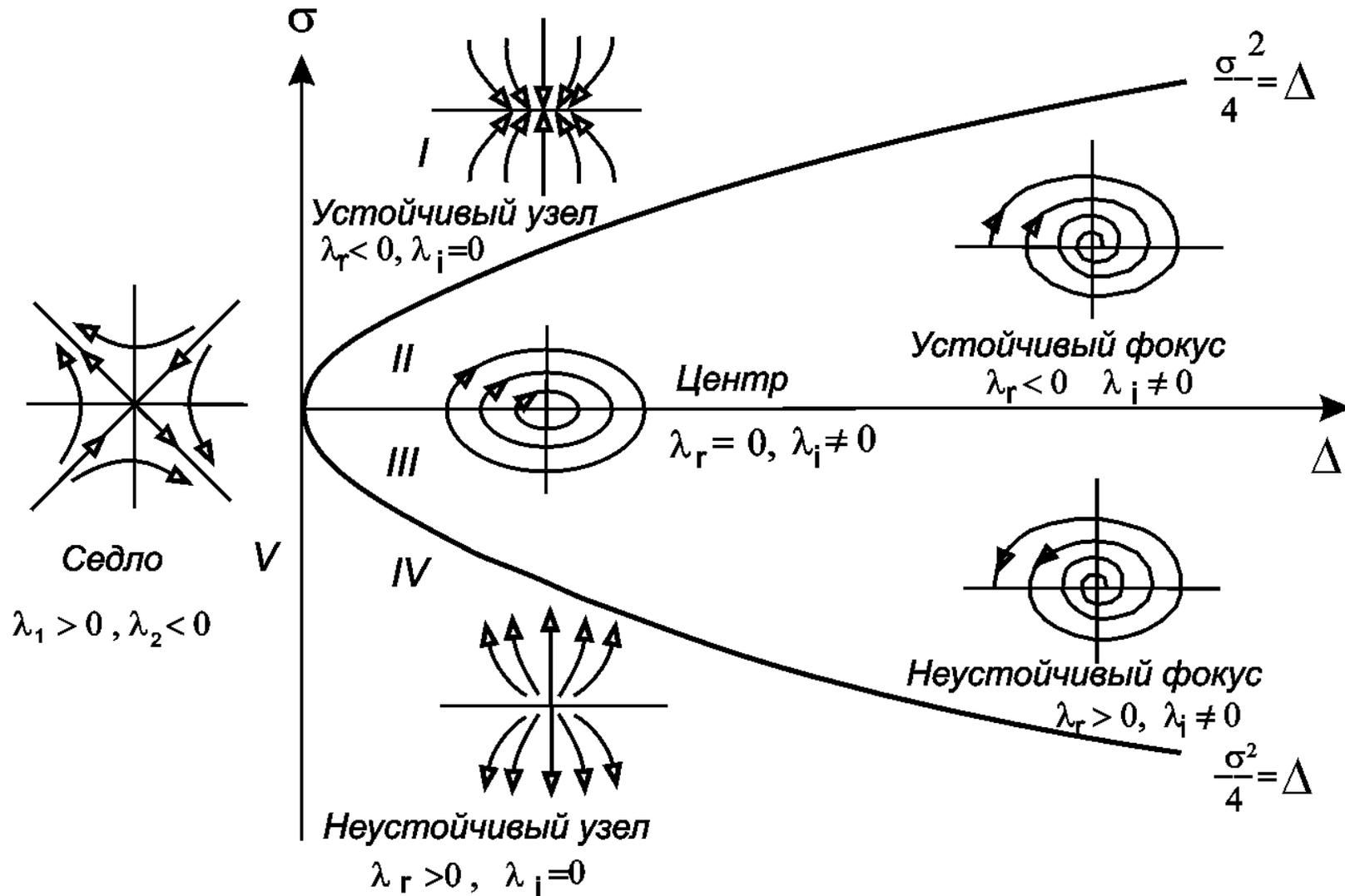
Центр.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - чисто мнимые)



Седло.  
( $\lambda_1, \lambda_2$  - действительны и разных знаков)

# Бифуркационная диаграмма

Фазово-параметрическая



$$\frac{dx}{dt} = ax + by,$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy$$

$$x = Ae^{\lambda t},$$

$$y = Be^{\lambda t}$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}{4}}$$

$$\sigma = -(a+d); \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\Delta}}{2}$$

# Линеаризация системы общего вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$x = \bar{x} + \xi,$$

$$y = \bar{y} + \eta.$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = P(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta),$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} = Q(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta).$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\bar{y}}{dt} = 0$$

# Разложение правой части в ряд Тейлора. Линеаризация системы

$$\frac{d\xi}{dt} = P(\bar{x}, \bar{y}) + a\xi + b\eta + (p_{11}\xi^2 + 2p_{12}\xi\eta + p_{22}\eta^2 + \dots) + \dots,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = Q(\bar{x}, \bar{y}) + c\xi + d\eta + (q_{11}\xi^2 + 2q_{12}\xi\eta + q_{22}\eta^2 + \dots) + \dots, \quad P(\bar{x}, \bar{y})=0,$$
$$Q(\bar{x}, \bar{y})=0,$$

Линеаризованная система

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta.$$

$$a = P'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = P'_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$c = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad d = Q'_y(\bar{x}, \bar{y}).$$

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$
$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

$$a = P'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad b = P'_y(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$c = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}), \quad d = Q'_y(\bar{x}, \bar{y}).$$

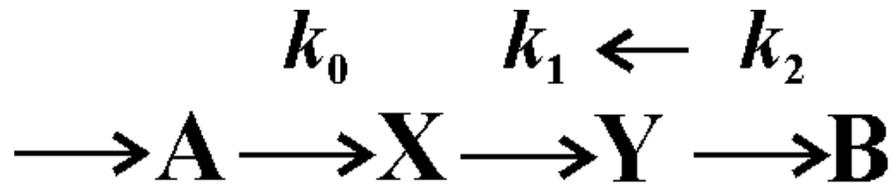
$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Если *оба* корня характеристического уравнения имеют **отрицательную действительную** часть и, следовательно, все решения уравнений первого приближения затухают, то *состояние равновесия устойчиво*;

- если *хотя бы один* корень имеет **положительную** действительную часть,
- то есть линеаризованная система имеет нарастающие решения, то *состояние равновесия неустойчиво*.
- Если *действительные части обоих* корней характеристического уравнения *равны нулю* или если *один корень равен нулю*, а *другой отрицателен*, то линеаризованные уравнения не дают ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия, и необходимо рассматривать члены более высокого порядка малости в разложении в ряд Тейлора правых частей уравнений

# Кинетические уравнения Лотки (A.J. Lotka. Elements of Physical Biology, 1925)



$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y,$$

$$\frac{dB}{dt} = k_2 y.$$



**Лотка Альфред Джеймс** (англ. *Alfred James Lotka*), 1880 –1949 – американский математик, физик, статистик, демограф. Разработал модели простейших физико-химических реакций. Изучал процесс смены поколений, анализировал процесс демографического развития семьи, заложил основы экономической демографии

# Фазовый портрет системы Лотки

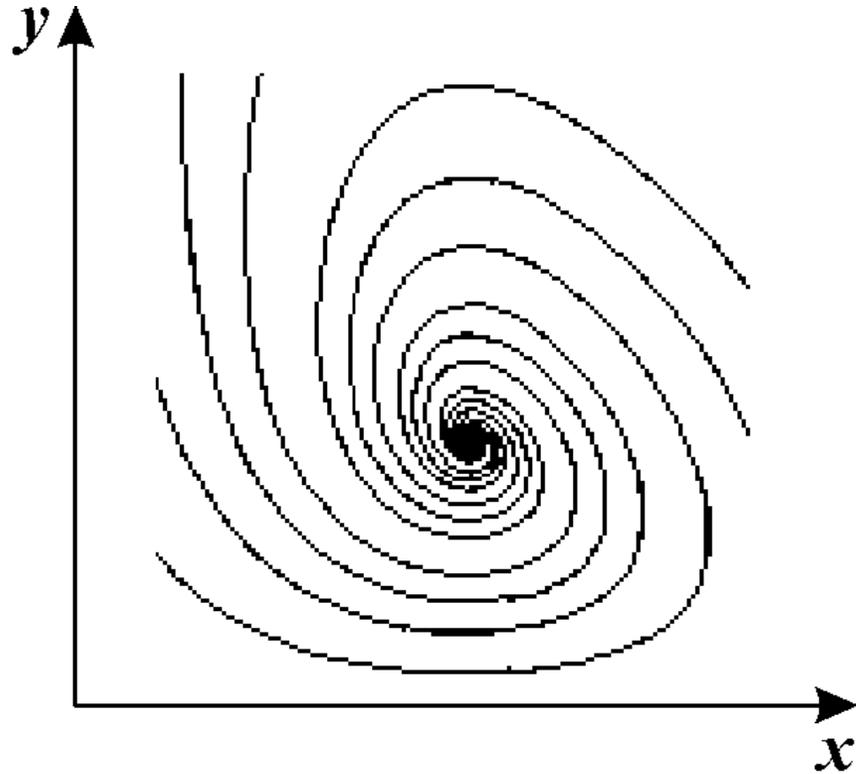
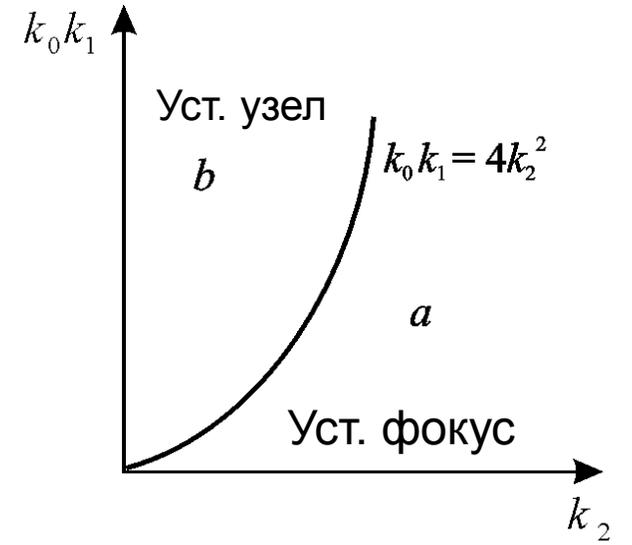
$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_1xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_1xy - k_2y.$$

*a* – устойчивый фокус,

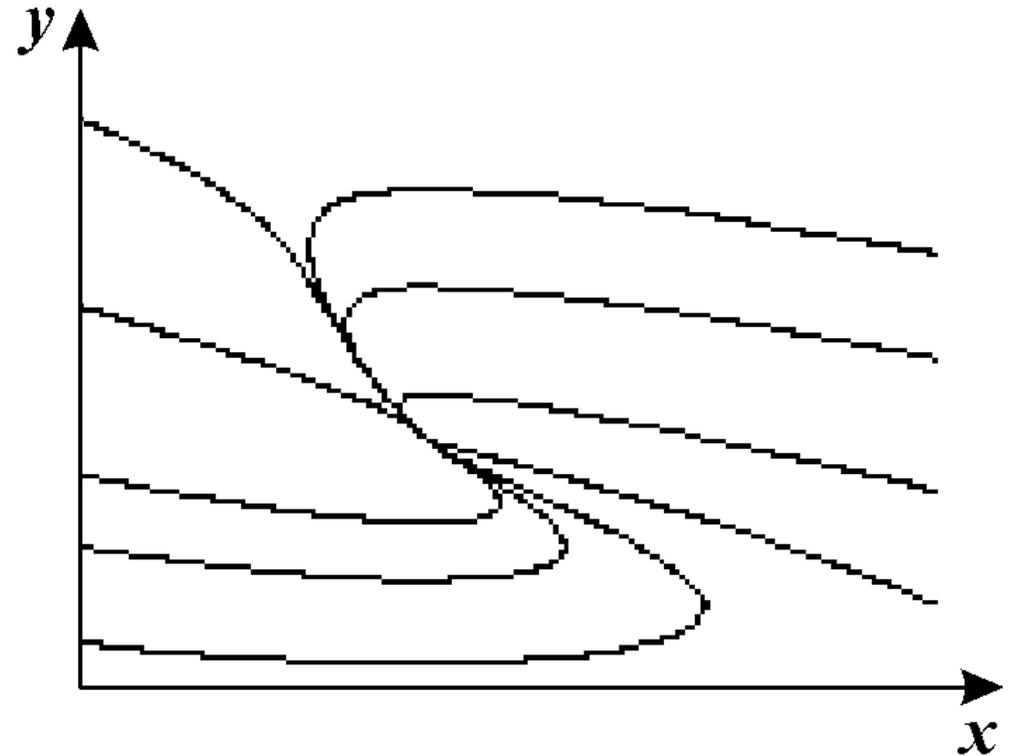
*б* – устойчивый узел.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{k_1k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left( \frac{k_1k_0}{k_2} \right)^2 - 4k_0k_1} \right]$$



*a*

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$$



*б*

$$k_0 = 2, \quad k_1 = 10, \quad k_2 = 4.$$

# Модель Вольтерра

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y$$

X – численность жертв

Y – численность хищников

Vito  
Volterra



**Вольтерра Вито** (1860 —1940) — выдающийся итальянский математик и физик. Работал в области дифференциальных уравнений с частными производными, теории упругости, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основатель математической теории популяций.

# Характеристическое уравнение для ненулевого стационарного состояния

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\beta \frac{\delta}{\gamma} \\ \gamma \frac{\alpha}{\beta} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

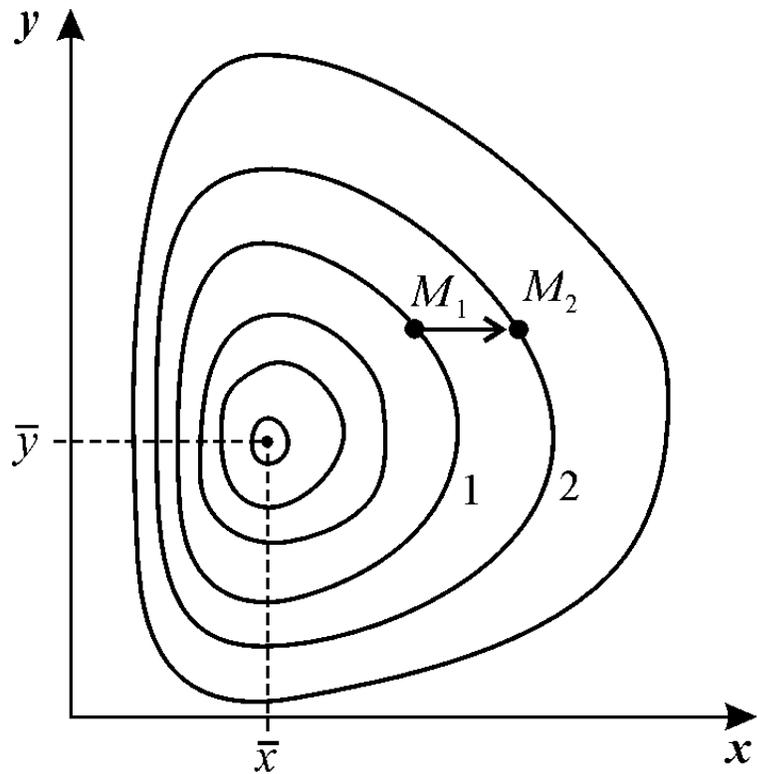
$$\lambda^2 + \alpha\delta = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-\alpha\delta}$$

# Фазовый портрет модели Вольтерра

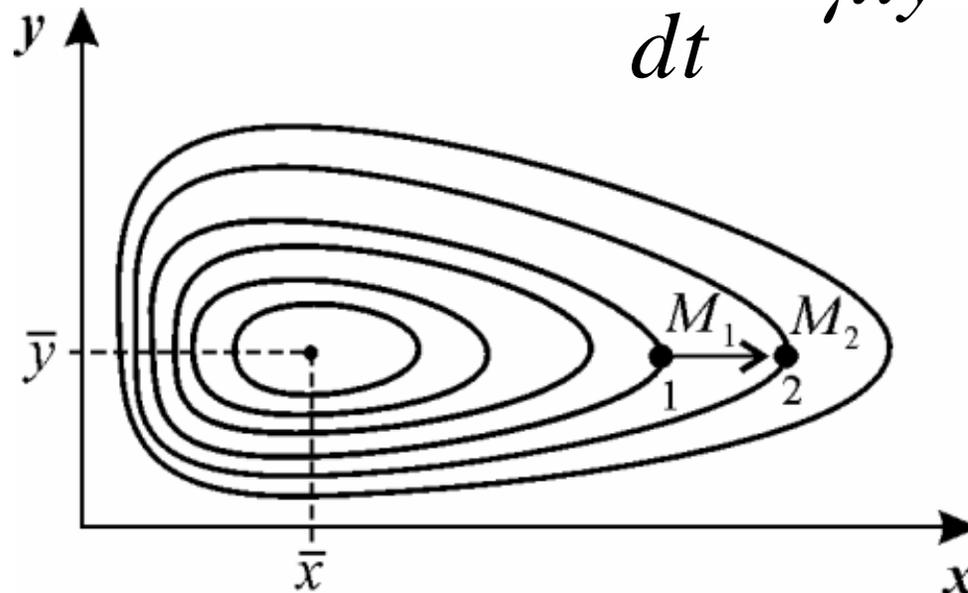
$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma xy - \delta y$$



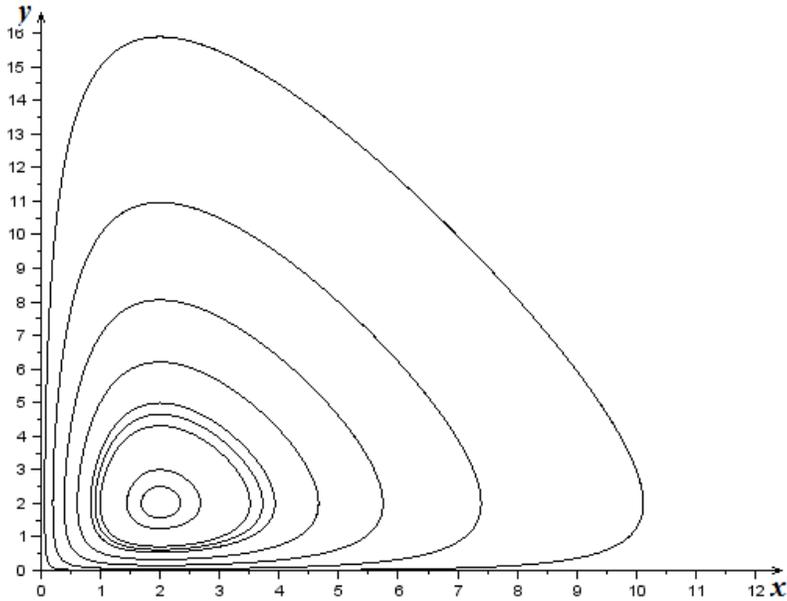
*a*

$$\alpha = 4, \beta = 0.3, \gamma = 0.4, \delta = 0.4$$



*b*

$$\alpha = 2, \beta = 0.3, \gamma = 0.4, \delta = 0.4$$



Volterra predator–prey model  
describing continuous oscillations of  
the population numbers.

(a) phase pattern;

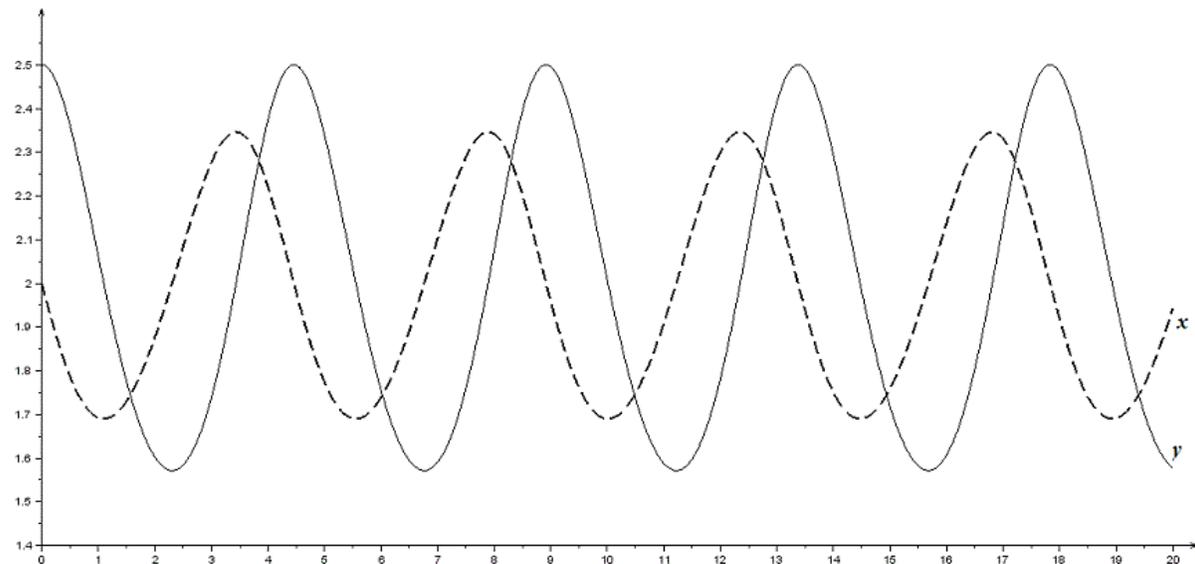
(b) dependence of the numbers  
of predators and preys on time.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

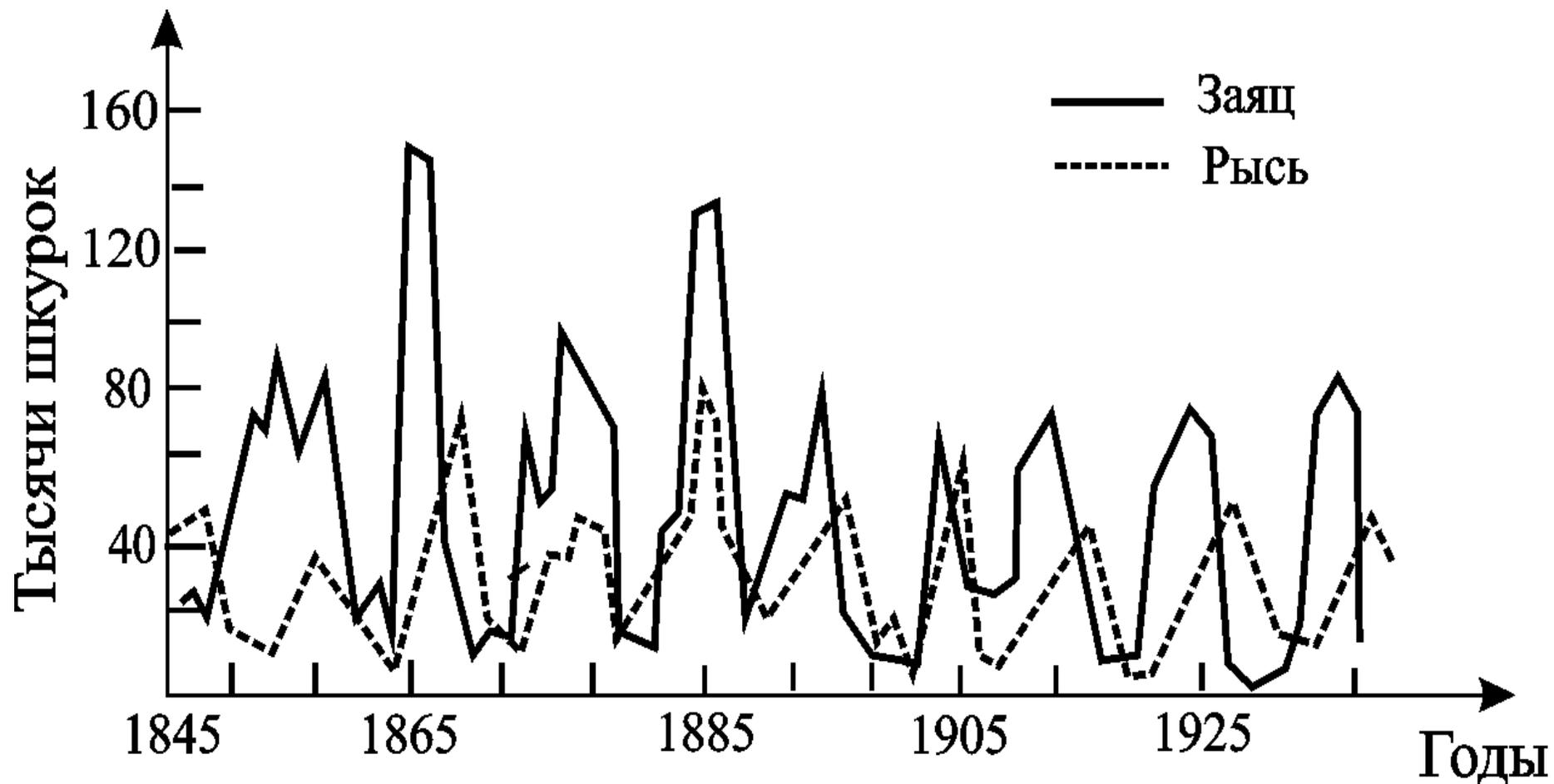
$$\frac{dy}{dt} = cxy - dy$$

$$a = 1; b = 0.5;$$

$$c = 1; d = 2$$



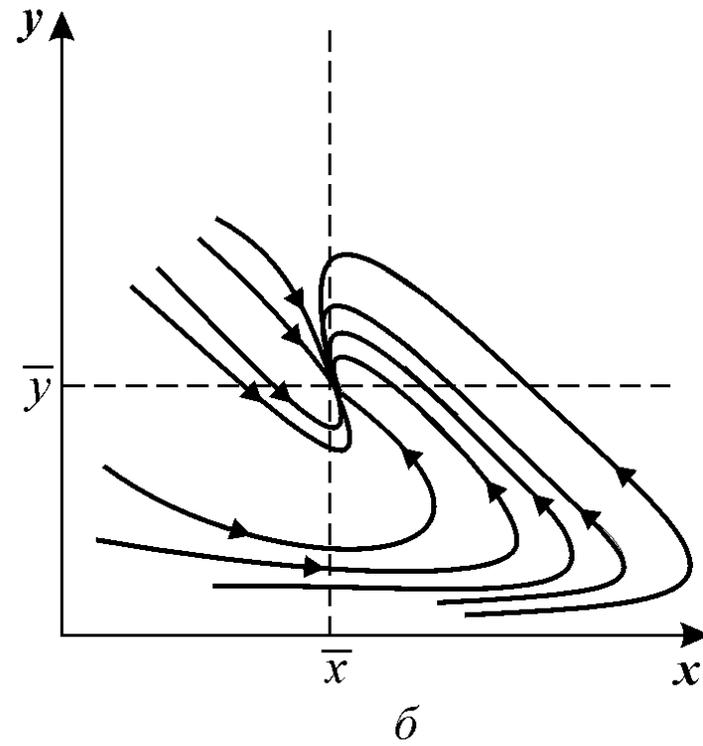
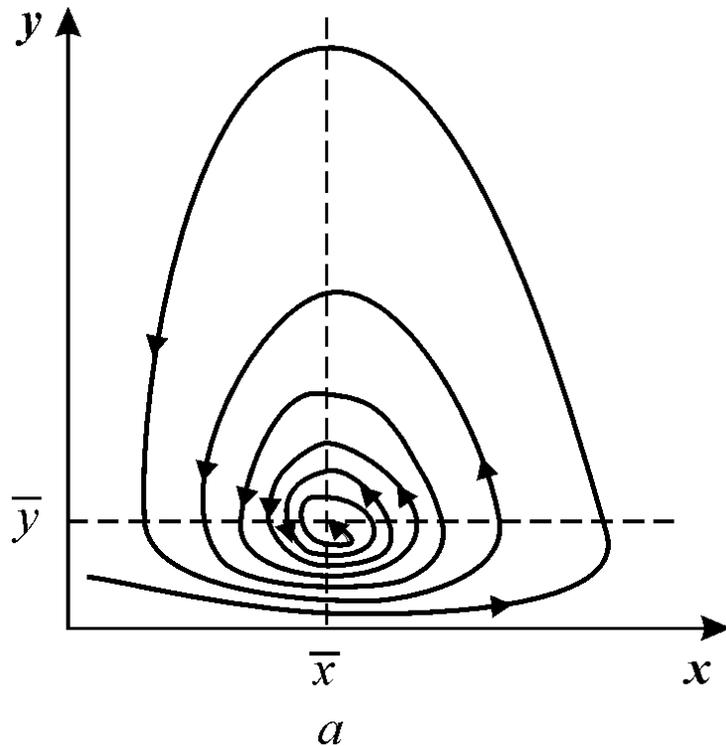
# Кривые численности зайца и рыси в Канаде (по К. Вилли, В. Детье, 1974)



# Уравнения Вольтерра с учетом самоограничения численности

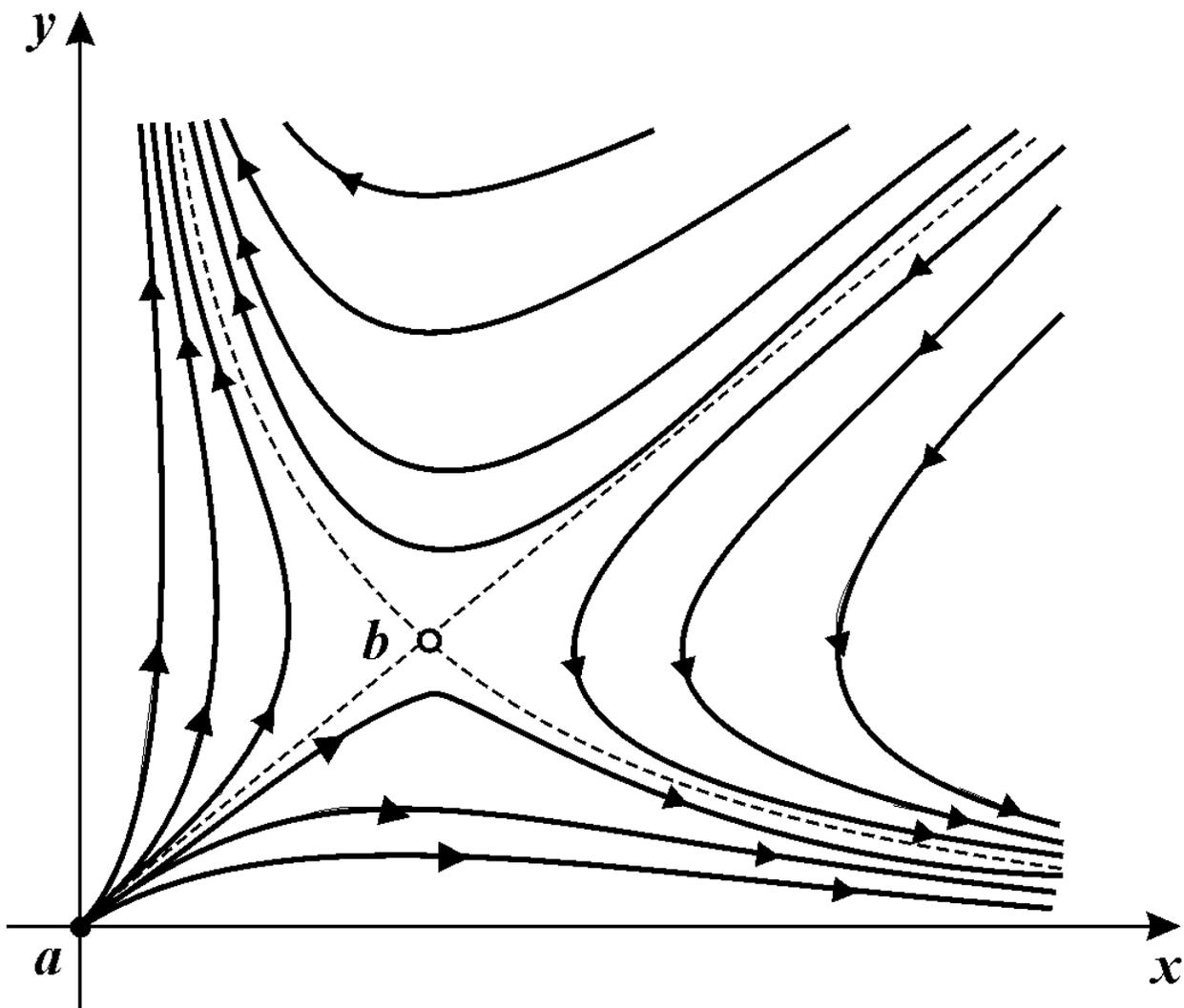
$$\frac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy}y - \delta_x x),$$
$$\frac{dy}{dt} = y(\varepsilon_y + \gamma_{yx}x - \delta_y y).$$

$$\varepsilon_x = 2,$$
$$\gamma_{xy} = 18,$$
$$\delta_x = 1,$$
$$\varepsilon_y = 3,$$
$$\gamma_{yx} = 5,$$
$$\delta_y = 1$$



$$\varepsilon_x = 2,$$
$$\gamma_{xy} = 1,$$
$$\delta_x = 1,$$
$$\varepsilon_y = 3,$$
$$\gamma_{yx} = 1,$$
$$\delta_y = 1$$

# Отбор одного из двух равноправных (конкуренция)



Дмитрий Сергеевич Чернавский (1926-2016)

Книги: Синергетика и информатика (2004);  
Ю.М.Романовский, Н.В.Степанова,  
Д.С.Чернавский. Математическая биофизика  
1985, 2004

$$\frac{dx}{dt} = ax - \gamma xy;$$
$$\frac{dy}{dt} = ay - \gamma xy.$$