Семинар 5

Модели, описываемые системами двух автономных дифференциальных уравнений. Исследование нелинейных систем второго порядка. Модель Лотки. Модель Вольтерры.

В общем виде модели, описываемые системами двух автономных дифференциальных уравнений, можно записать как:

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y). \end{cases}$$

Исследование нелинейных систем второго порядка будем проводить по следующему общему плану:

1. Находим стационарные состояния $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$, $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)\ldots$ $(\overline{x}_n, \overline{y}_n)$ системы двух автономных дифференциальных уравнений, приравнивая производные и, как следствие, правые части уравнений нулю:

$$\begin{cases} P(\overline{x}, \overline{y}) = 0, \\ Q(\overline{x}, \overline{y}) = 0. \end{cases}$$

2. Линеаризуем уравнения вблизи каждого стационарного состояния:

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases} \qquad \text{где} \begin{pmatrix} a = P'_x(\overline{x}, \overline{y}) & b = P'_y(\overline{x}, \overline{y}) \\ c = Q'_x(\overline{x}, \overline{y}) & d = Q'_y(\overline{x}, \overline{y}) \end{pmatrix}.$$

3. Записываем характеристическое уравнение для каждого стационарного состояния:

$$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

4. Находим корни характеристического уравнения (либо используем бифуркационную диаграмму) и определяем характер фазового портрета вблизи каждого стационарного состояния:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left((a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}\right).$$

5. Находим главные изоклины (нуль-изоклины).

Изоклину горизонтальных касательных находим из уравнения: $Q(x, y) = 0$.

Изоклину вертикальных касательных находим из уравнения: $P(x, y) = 0$.

6. В случае седла находим уравнения сепаратрис из уравнений:

$(a-\lambda_1)\cdot x + b\cdot y = 0$ или $c\cdot x + (d-\lambda_1)\cdot y = 0$,

$(a-\lambda_2)\cdot x + b\cdot y = 0$ или $c\cdot x + (d-\lambda_2)\cdot y = 0$.

МОДЕЛЬ ЛОТКИ

Пусть в некотором объеме находится в избытке вещество **A.** Молекулы **A** с некоторой постоянной скоростью k_0 превращаются в молекулы вещества **X** (рис. 5.1).

$$\to A \xrightarrow{k_0} X \xrightarrow{k_1} \overleftarrow{Y} \xrightarrow{k_2} B$$

Рис. 5.1 Схема химической реакции в модели, предложенной А. Лоткой.

Вещество **X** может превращаться в вещество **Y** с константой скорости k_1, причем **Y** является активатором этой стадии (продуктная активация). В схеме это отражено обратной стрелкой над символом **Y**. Молекулы **Y**, в свою очередь, необратимо распадаются с константой k_2, в результате образуется вещество **B**.

Для независимых переменных **X** и **Y** запишем систему уравнений, описывающих реакцию, представленную на рис. 5.1:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y. \end{cases} \tag{5.1}$$

Исследуем систему в соответствии с приведенным выше планом.

1. Стационарное решение системы (5.1) получим, приравнивая правые части уравнений нулю:

$$\begin{cases} k_0 - k_1 xy = 0, \\ k_1 xy - k_2 y = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Стационарное состояние системы единственно. Координаты особой точки:

$$\bar{x} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \bar{y} = \frac{k_0}{k_2}.$$

2. Линеаризуем уравнения вблизи найденного стационарного состояния. Частные производные правых частей уравнений системы (5.1):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -k_1 \bar{y} = -\frac{k_1 k_0}{k_2}, \ \frac{\partial P}{\partial y} = -k_1 \bar{x} = -k_2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = k_1 \bar{y} = \frac{k_1 k_0}{k_2}, \ \frac{\partial Q}{\partial y} = k_1 \bar{x} - k_2 = 0.$$

Линеаризованная система в новых переменных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{k_1 k_0}{k_2} x - k_2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{k_1 k_0}{k_2} x. \end{cases} \tag{5.3}$$

3. Запишем характеристическое уравнение системы (5.3):

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{k_1 k_0}{k_2} - \lambda & -k_2 \\ \dfrac{k_1 k_0}{k_2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 + \lambda \frac{k_1 k_0}{k_2} + k_0 k_1 = 0.$$

4. Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{k_1 k_0}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 - 4k_0 k_1}\,\right].$$

При $\left(\dfrac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 < 4k_0 k_1$ (или $k_2 > \dfrac{1}{4} k_0 k_1$), имеют место затухающие колебания, особая точка — устойчивый фокус.

При $\left(\dfrac{k_1 k_0}{k_2}\right)^2 > 4k_0 k_1$ (или $k_2 < \dfrac{1}{4} k_0 k_1$) — монотонное приближение концентраций к стационарным значениям, особая точка — устойчивый узел.

5. Изоклины горизонтальных касательных находим из уравнения $k_1xy - k_2y = 0$: $y = 0$, $x = \dfrac{k_2}{k_1}$.

Изоклину вертикальных касательных находим из уравнения $k_0 - k_1xy = 0$: $y = \dfrac{k_0}{k_1x}$.

ЗАДАНИЕ 5.1.

5.1.1. Исследуйте модель Лотки при следующих наборах параметров: 1) $k_0 = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 2$; 2) $k_0 = 3$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$.

5.1.2. Для построения фазового портрета, исходя из рассчитанных стационарных состояний, определите примерный масштаб осей OX и OY (в качестве минимальных значений можно взять нулевые значения, в качестве максимальных значений — удвоенные стационарные значения). Введите *исходные уравнения* Лотки в программу для решения ОДУ. Для каждого из заданных наборов параметров постройте фазовые и кинетические портреты.

Зарисуйте эскизы фазовых портретов с учетом нуль-изоклин. Рядом с фазовыми портретами нарисуйте соответствующие кинетические кривые.

5.1.3. Введите *линейные уравнения* Лотки в программу решения ОДУ. Для каждого из заданных наборов параметров постройте фазовые портреты и сравните с фазовыми портретами нелинейной системы Лотки. Сравните расположение фазовых траекторий вблизи и вдали от стационарной точки.

МОДЕЛЬ ВОЛЬТЕРРЫ

Рассмотрим ***модель «хищник-жертва»***, которая впервые была предложена В. Вольтеррой для объяснения периодических изменений числа особей.

Пусть в некотором замкнутом районе живут хищники и жертвы, например, зайцы и волки. Зайцы питаются растительной пищей, имеющейся всегда в достаточном количестве. Волки могут питаться лишь зайцами. Обозначим число зайцев (жертв) — x, а число волков (хищников) — y. Так как количество пищи у зайцев неограниченно, мы можем предположить, что они размножаются со скоростью, пропорциональной их числу $\varepsilon_x x$.

Если рождаемость зайцев превышает их смертность, то $\varepsilon_x > 0$. Выражение $\varepsilon_x x$ соответствует *автокаталитической реакции* первого порядка.

Пусть убыль зайцев пропорциональна вероятности встречи зайца с волком, то есть пропорциональна произведению численностей xy, коэффициент пропорциональности γ_{xy}. Можно предположить, что количество волков нарастает тем быстрее, чем чаще происходят их встречи с зайцами, а именно пропорционально xy, коэффициент пропорциональности γ_{yx}.

Кроме того, имеет место процесс естественной смертности волков, причем скорость смертности пропорциональна их количеству, коэффициент пропорциональности ε_y.

Эти рассуждения приводят к формулировке классической *вольтерровской* системы уравнений, описывающей изменения численности жертв x и хищников y:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(\varepsilon_y - \gamma_{yx} x), \end{cases} \tag{5.4}$$

где ε_x, ε_y, γ_{xy}, γ_{yx} положительны.

Будем исследовать систему в соответствии с приведенным ранее планом.

<table>
<tr><td colspan="2">1. Стационарные решения системы (5.4) получим, приравнивая правые части уравнений нулю: $x(\varepsilon_x - \gamma_{xy} y) = 0$, $-y(\varepsilon_y - \gamma_{yx} x) = 0$.</td></tr>
<tr><td>$\bar{x}_1 = 0$, $\bar{y}_1 = 0$.</td><td>$\bar{x}_2 = \dfrac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}}$, $\bar{y}_2 = \dfrac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Линеаризуем уравнения вблизи каждого стационарного состояния.
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \varepsilon_x - \gamma_{xy}\bar{y},\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\gamma_{xy}\bar{x},\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \gamma_{yx}\bar{y},\ \frac{\partial Q}{\partial y} = -\varepsilon_y + \gamma_{yx}\bar{x}.$$</td></tr>
<tr><td>$$\frac{\partial P}{\partial x} = \varepsilon_x,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$ $$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = -\varepsilon_y.$$</td><td>$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_y \gamma_{xy}}{\gamma_{yx}},$$ $$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\varepsilon_x \gamma_{yx}}{\gamma_{xy}},\ \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$</td></tr>
<tr><td>$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varepsilon_x x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\varepsilon_y y. \end{cases}$$</td><td>$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\varepsilon_y \gamma_{xy}}{\gamma_{yx}} y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\varepsilon_x \gamma_{yx}}{\gamma_{xy}} x. \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Характеристическое уравнение для каждого стационарного состояния:</td></tr>
<tr><td>$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \lambda & 0 \\ 0 & -\varepsilon_y - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$ или $\lambda^2 - \lambda(\varepsilon_x - \varepsilon_y) - \varepsilon_x \varepsilon_y = 0$.</td><td>$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{\varepsilon_y \gamma_{xy}}{\gamma_{yx}} \\ \dfrac{\varepsilon_x \gamma_{yx}}{\gamma_{xy}} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$ или $\lambda^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y = 0$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">4. Для определения типа стационарного состояния вспомним бифуркационную диаграмму для уравнения $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$ (Семинар 4).</td></tr>
<tr><td>$\sigma = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)$, $\Delta = -\varepsilon_x\varepsilon_y$.
$\Delta < 0$ означает, что независимо от σ, особая точка — седло.
Корни характеристического уравнения действительные, разных знаков.</td><td>$\sigma = 0$, $\Delta = \varepsilon_x\varepsilon_y$.
$\sigma = 0$, $\Delta > 0$ означает, что особая точка — центр.
Корни характеристического уравнения чисто мнимые.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Изоклины горизонтальных касательных находим из уравнения $-y(\varepsilon_y - \gamma_{yx}x) = 0$: $y = 0$, $x = \dfrac{\varepsilon_y}{\gamma_{yx}}$.
Изоклины вертикальных касательных находим из уравнения $x(\varepsilon_x - \gamma_{xy}y) = 0$: $x = 0$, $y = \dfrac{\varepsilon_x}{\gamma_{xy}}$.</td></tr>
<tr><td>6. Уравнения сепаратрис:
$x = 0$, $y = 0$.</td><td></td></tr>
</table>

Особая точка типа *центр* устойчива по Ляпунову, но *не асимптотически*.

Пусть в системе происходят колебания с некой амплитудой. Если дать небольшое отклонение и предоставить систему самой себе, то в системе возникнут колебания с новой постоянной амплитудой. Заданное отклонение нарастать не будет, однако и в исходное состояние система не вернется.

В отсутствии других воздействий новые характеристики системы могут бесконечно долго сохранятся неизменными.

ЗАДАНИЕ 5.2.

5.2.1. Исследуйте модель Вольтерры при следующих значениях параметров: $\varepsilon_x = 2$, $\varepsilon_y = 2$, $\gamma_{xy} = 4$, $\gamma_{yx} = 4$.

5.2.2. Для построения фазового портрета, исходя из рассчитанных стационарных состояний, определите примерный масштаб осей OX и OY, (в качестве минимальных значений можно взять нулевые значения, в качестве максимальных значений — удвоенные стационарные значения). Постройте на фазовой плоскости изоклины горизонтальных и вертикальных касательных (нуль-изоклины) и сепаратрисы.

5.2.3. Введите *исходные уравнения* Вольтерры в программу решения ОДУ, постройте фазовый и кинетический портреты с учетом всех найденных стационарных точек. Зарисуйте эскиз фазового портрета с учетом нуль-изоклин. Рядом с фазовым портретом нарисуйте кинетическую кривую, соответствующую ненулевому стационарному состоянию.

5.2.4. Введите *линейные уравнения* Вольтерры в программу решения ОДУ для каждого стационарного состояния, постройте фазовые портреты и сравните с фазовым портретом нелинейной системы Вольтерры. Сравните расположение фазовых траекторий вблизи и вдали от стационарных точек.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сколько стационарных состояний в модели Лотки? Какова их устойчивость?
2. Как зависит характер особой точки от скорости распада вещества **Y**?
3. Сколько стационарных состояний в модели Вольтерры? Какова их устойчивость?
4. Являются ли устойчивыми колебания в модели Вольтерры? Почему?
5. Как соотносятся пики численности хищников и жертв?
6. Чем отличается динамика колебаний в модели Вольтерры от колебаний в модели Лотки?

ЗАДАЧИ К СЕМИНАРУ 5

5.1. Модель выбора одного из равноправных видов может описываться уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay - xy, \end{cases}$$

где a — коэффициент размножения каждого из видов.

Найдите координаты особых точек. Определите тип каждого из найденных стационарных состояний.

Постройте фазовый портрет системы: а) постройте главные изоклины системы; б) отметьте стационарные точки на фазовой плоскости; в) постройте, где необходимо, сепаратрисы; г) постройте фазовые траектории и стрелками укажите их направление.

5.2. Модель конкуренции равноправных видов в безразмерных переменных может быть описана системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1 - by - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1 - bx - y). \end{cases}$$

Здесь коэффициент b показывает, во сколько раз отличаются скорости межвидовой и внутривидовой конкуренции.

Найдите координаты особых точек. Определите тип каждого из найденных стационарных состояний в зависимости от b (рассмотрите при $b \neq 1$).

Постройте фазовые портреты системы при $b = 2$ (межвидовая конкуренция в 2 раза превышает внутривидовую) и при $b = 0.5$ (внутривидовая конкуренция в 2 раза превышает межвидовую):

а) постройте главные изоклины системы;

б) отметьте стационарные точки на фазовой плоскости;

в) постройте, где необходимо, сепаратрисы, укажите области (выше или ниже сепаратрис) притяжения устойчивых состояний;

г) постройте фазовые траектории и стрелками укажите их направление для каждого фазового портрета.

5.3. Для каждого из видов задачи 5.2 постройте фазопараметрическую диаграмму — зависимость координаты стационарного состояния от параметра b в диапазонах $0 < b < 1$, $1 < b < 2$.

Для этого

а) рассмотрите зависимость координат каждого из стационарных состояний от параметра b (из рассмотрения можно исключить состояние, в котором численность обоих видов равна нулю);

б) рассчитайте $\bar{x}$ и $\bar{y}$ для нескольких значений параметров b из заданного диапазона (для каждого стационарного состояния должен получиться ряд последовательных значений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в зависимости от b);

в) соедините сплошной линией устойчивые состояния и пунктирной — неустойчивые.

При каком соотношении межвидовой и внутривидовой конкуренции наблюдается сосуществование видов, а при каких условиях выживает только один из видов (триггер)?